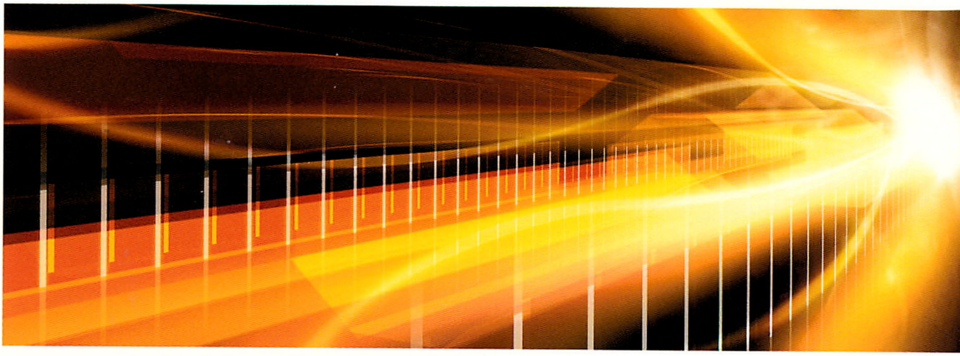
速修

物理数学の応用技法

大谷 俊介 ▶ Ohtani Shunsuke



プレアデス出版

速修
物理数学の応用技法

大谷 俊介 ▶ Ohtani Shunsuke

プレアデス出版

はじめに

本書のコンセプトは即戦力となるための「技のカタログ」です。パッと読んですぐ真似ができ、少ない前提で定理が再現でき、汎用性があってたくさん問題が解けるようになる。さらにその問題の周辺事項を勉強していけば、ひととおり基礎的な知識が身に付く、というのが本書の特徴です。ここでいう「問題」とは、具体的な定積分計算と微分方程式の初期値問題、境界値問題を指します。

本書は**定積分の技巧**と**微分方程式の解法**の習得を目指して、応用数学の基本事項をまとめたものです。対象読者は物理学科、工学部（あるいは数学の素養を求められている社会学系）の学生、社会人の方としています。

各トピックごとに 12 ページをおよそ均等に割り振り、最小限必要な事項に絞って記載しました。また、なし崩し的にならないようおおかたの主張に直感優先で導出をつけてありますが、メインはあくまで「使い方」なので証明は必ずしも完全ではありません。

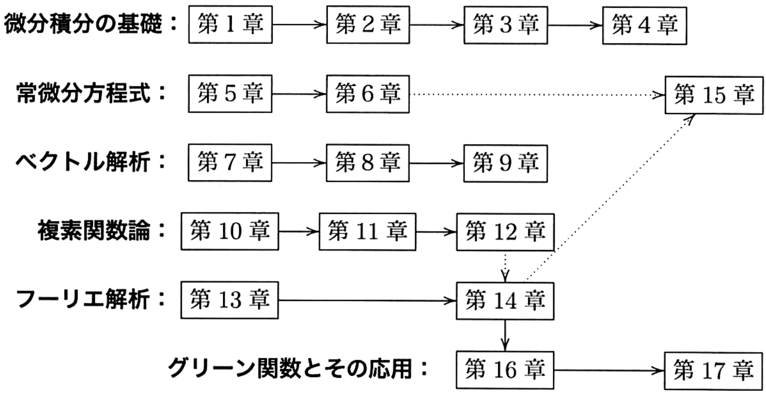
また、グリーン関数の基本解などをボーナストラックとして付録におさめ、本編を読んでいて不足な点はこちらで補えるようにしておきました。

あまり寄り道をせずに、駆け抜けるようにゴールを目指しましょう。

2012 年 2 月　大谷 俊介

本書の使い方

本書は読者のレベルに併せて基本的にどの分野からでも読みはじめることができます。参考に、学部のカリキュラムや分野別にまとめてフローチャートを示しておきます。



本書は（特に物理への）応用を意識して書かれており、学部レベルの具体問題、例えば**『球の慣性モーメント』『アルキメデスの原理』『ミクロカノニカル分布』『スターリングの公式』『第一ボルン近似』『リエナール・ヴィーヘルトポテンシャル』『化学反応の進行速度』**などの話題（これらはつまるところ定積分と微分方程式の初期値、境界値問題です）はすべて本書に収録されています（索引で調べてみてください）。また、**『完全規格直交系展開』『テンソルと縮約のテクニック』**など物理を勉強していて気になってくる項目もきちんと押さえています。ですから、読者は物理の勉強に煮詰まったときに本書を読むことも、あらかじめ本書で知識を仕入れてから最短で物理の勉強に入ることもできるでしょう。

あるいは、**数学科の大学院入試で現れる定積分計算問題**も収録しています。留数定理を用いた定積分計算はもはやルーティンワークですが、経路をうまく特定するにはそれなりの「慣れ」が必要となります。定積分計算以外にも、有名な級数の和公式を得るにはフーリエ級数展開やマクローリン展開が役に立ちます。数学科で理論は勉強したが、応用が苦手な読者は特に、各章の章末問題を眺めて、これら基本問題を解く素養を身につけることができるでしょう。

具体的なモチベーションはないけれど、解析学の応用技法を最短で身につけたい、という読者はどこからでも読み進めることができます。分量は類書に比べればさほど多くないですし、一章につき一週間あれば十分読みこなすことができるはずです。

目次

* のついたセクションはやや難しめの内容を伴っているので、はじめはスキップしても大丈夫。

第 1 章

極限と微分、テイラー展開

本章のテーマは『近似』と『復元』です。『関数の極限値を求める』『曲線の切れ端から全体像を復元する』など、様々なシーンで活躍するテイラー展開を手に入れましょう。

1.1 極限と微分

まずは高校数学でおなじみの極限公式から振り返ってみましょう。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

本書でも不定形の極限を計算する機会は何度か訪れるのですが、いちいちこれらの公式を覚えて組み合わせるよりも、次の一撃必殺の定理を知っておくと断然便利です。

l'Hospital(ロピタル)の定理

定理 1.1 $f(x), g(x)$ が微分可能であり、実数 a に対して $\lim_{x\to a} f(x)=0$, $\lim_{x\to a} g(x)=0$ で $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するならば次が成り立つ。

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

上の主張では $0/0$ の不定形に対してのみ有効ですが、$f(x)\to 1/g(x), g(x)\to 1/f(x)$ のように置き換えてやれば ∞/∞ の不定形にも使えます。証明はテイラー展開を使うためとりあえず後回し（→p13）にして、まずはこれを使ってみましょう。

例題 次の極限を計算せよ。
(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$　(2) $\lim_{x\to 0} x^x$　(3) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sin x}-\frac{1}{x^2}\right)$

解答

(1)　$(\sin x)'=\cos x,\ x'=1$ より $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$ となります。

(2)　$y = x^x$ と置いて $\log y$ の極限を考えましょう。

$$\lim_{x\to+0} \log y = \lim_{x\to+0} \log(x^x) = \lim_{x\to+0} x\log x = \lim_{x\to+0} \frac{\log x}{1/x}$$

ここで定理 1.1 により $\displaystyle\lim_{x\to+0} \frac{\log x}{1/x} = \lim_{x\to+0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to+0}(-x) = 0$ であるから、$\displaystyle\lim_{x\to+0} y = \lim_{x\to+0} e^{\log y} = 1$ が得られます。

(3)　通分しましょう。(与式)$= \dfrac{x - \sin x}{x^2 \sin x}$ とし、ロピタルの定理を 3 回用いて

$$\lim_{x\to0} \frac{x - \sin x}{x^2 \sin x} = \lim_{x\to0} \frac{1 - \cos x}{2x\sin x + x^2\cos x} = \lim_{x\to0} \frac{\sin x}{2\sin x + 4x\cos x - x^2 \sin x}$$
$$= \lim_{x\to0} \frac{\cos x}{6\cos x - 6x\sin x - x^2\cos x} = \frac{1}{6}$$

として、答えを得ます。■

順番が逆になりましたが、いくつかの微分公式を列挙しておきます。

主要な微分公式

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \qquad \frac{d}{dx}\sin x = \cos x \qquad \frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$$
$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \qquad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x \qquad \frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$$
$$\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x} \qquad \frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \frac{d}{dx}\tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

ここで sinh, cosh, tanh は双曲線関数であり、

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

で定義されます。sinh をハイパボリックサイン、cosh をハイパボリックコサイン、tanh をハイパボリックタンジェントと呼びます。[*1]

次に、積の微分の公式を一般化したライプニッツの公式について触れておきます。

Leibniz（ライプニッツ）の公式

定理 1.2 関数 $f(x), g(x)$ が n 階微分可能ならば、次が成り立つ。

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$$
$$= f^{(n)}g + \binom{n}{1}f^{(n-1)}g' + \binom{n}{2}f^{(n-2)}g'' + \cdots + \binom{n}{n-1}f'g^{(n-1)} + fg^{(n)}$$

ただし $f^{(n)}$ は f の n 階微分を表す。

[*1] $\mathrm{sh}(x)$ や $\mathrm{ch}(x)$ と書くこともあります。

$\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$ を使えば帰納法で証明できます。$\binom{a}{b}=\dfrac{(a+b)!}{a!b!}$ は二項係数です。

例題 $\dfrac{d^n}{dx^n}[x^n \sin x]$ を計算せよ。

解答 x^n を $n-k$ 階微分したものを $x^{n(n-k)}$ で表すことにします。何度も微分していると $(\sin x)^{(k)}$ は $\cos x, -\sin x, -\cos x, \sin x, \cdots, \sin(x+\frac{k\pi}{2})$ と書けるとわかります。*2 これにより、以下の通り微分できます。

$$\frac{d^n}{dx^n}[x^n \sin x] = \sum_{k=0}^{n} x^{n(n-k)}(\sin x)^{(n)} = \underline{\sum_{k=0}^{n} n(n-1)\cdots(n-k+1)\sin(x+\tfrac{\ell\pi}{2})}$$

が得られます。

1.2 テイラー展開

$f(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\cdots+a_n(x-a)^n$ という多項式を考えます。係数 $a_k(k=0,1,2,\cdots,n)$ を $f(x)$ を使って表そうとすると、

$$\begin{aligned}
f(a) &= a_0 & &\to a_0 = f(a) \\
f'(a) &= a_1 & &\to a_1 = f'(a) \\
f''(a) &= 2a_2 & &\to a_2 = \tfrac{1}{2}f''(a) \\
f^{(3)}(a) &= 2\cdot 3a_3 & &\to a_3 = \tfrac{1}{3!}f^{(3)}(a) \\
&\vdots & &\quad\vdots \\
f^{(n)}(a) &= n!a_n & &\to a_n = \tfrac{1}{n!}f^{(n)}(a)
\end{aligned}$$

となり、元の多項式は

$$f(x) = f(a) + \tfrac{1}{1!}f'(a)(x-a) + \cdots + \tfrac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

と書き換えられることがわかります。さて、左辺 $f(x)$ は多項式だったのですが、あえて $f(x)=\sin x$ などとおいてみると……実は仮想的に現れる右辺の多項式がほとんど $\sin x$ に等しくなることがわかります（後述）。

$f(x)$ を一般の関数に拡張して考えるのがテイラー展開の手法です。

---

*2 帰納法で証明します：$k=0$ で O.K.,$k=\ell$ で $\sin(x+\frac{\ell\pi}{2})$ とすると、$\dfrac{d}{dx}\sin(x+\frac{\ell\pi}{2})=\cos(x+\frac{\ell\pi}{2})$ が得られ $k=\ell+1$ でも O.K.

Taylor（テイラー）展開

定理 1.3
$f(x)$ が $x=a$ で何度でも微分可能ならば、定数 a に対して次が成り立つ。

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad \left(\text{ただし } f^{(n)}(x)=\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right)$$

右辺を $x=a$ のまわりのテイラー展開と呼ぶ。[a]

[a] $x=0$ のまわりのテイラー展開を特に**Maclaurin（マクローリン）展開**と呼びます。

証明は付録にまわし、収束性については次節で扱うことにします。まずは具体的な関数を用意してテイラー展開してみましょう。ここでは $\sin x$ を $x=0$ のまわりにテイラー展開してみます。$f(x)=\sin x$ とおくと、n 階微分して

$$f^{(n)}(0)=0,1,0,-1,0,1,0,-1,\cdots\ (n=0,1,2,\cdots)$$

のようになり（実際に微分してみて下さい）、

$$\sin x = x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots$$

と書けることがわかります。

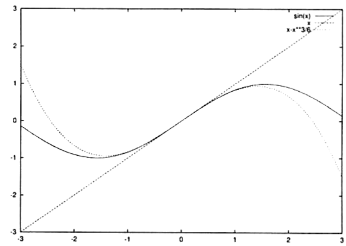


図 1.1　$\sin x, x, x-\frac{1}{3!}x^3$

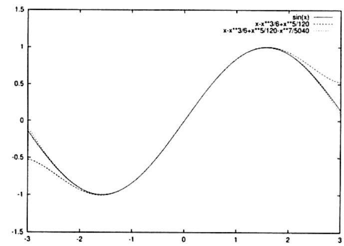


図 1.2　$\sin x$,5 次近似、7 次近似

テイラー展開の強力さはプロットしてみるとより一層はっきりします。例えば $x=0.1$ のとき、x^3 や x^5 は x に比べてほとんど無視できるほど[*3]小さくなります。そこで、x^3 まで、x^5 までと、有限次でテイラー展開を打ち切った式をそれぞれ**3 次近似**、**5 次近似**などと呼ぶことにします。右のグラフは実線が $\sin x$ を表し、点線がそれぞれ 1 次、3 次、5 次、7 次近似を表します。7 次近似の時点でほとんど $\sin x$ と重なっていることがわかりますね。このように、実用的なことを考えれば**テイラー展開する際にわざわざ無限次まで計算する必要はなく、（x の動く範囲によっては）低い次数で打ち切っても十分良い近似になることがわかります。**

例題

(1)　e^x をマクローリン展開（$x=0$ のまわりでテイラー展開）せよ。
(2)　級数の和 $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$ を求めよ。
(3)　$\cos x$ をマクローリン展開せよ。

[*3] kg 基準で考える我々は、体重が 1g 変わっても気にならないという、あの感覚です。

(4) 次の**オイラーの公式**が成り立つことを示せ。ただし $i = \sqrt{-1}$ である。

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

(5) **ロピタルの定理**を示せ。

(6) $\dfrac{1}{1-x}$ をマクローリン展開せよ。

解答

(1) $(e^x)' = e^x$ より、$f(x) = e^x$ とおくと $f^{(n)}(0) = 1$ とわかります。これより e^x をマクローリン展開して次の式を得ます。

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$$

(2) (1) で $x = 1$ として $e = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \cdots$ を得ます。

(3) $\sin x$ 同様に $g(x) = \cos x$ とおくと $g^{(n)}(0) = 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \cdots$ $(n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ のようになるので、マクローリン展開して次を得ます。

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$

あるいは $\sin x$ のマクローリン展開を微分しても同じ結果が得られます。

(4) e^x のマクローリン展開で $x \to ix$ と置き換えると

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}ix^3 + \cdots \\ &= \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots\right)}_{=\cos x} + i\underbrace{\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots\right)}_{=\sin x} \end{aligned}$$

と書けます。波線部は $\cos x$ のマクローリン展開に一致し、下線部は $\sin x$ のマクローリン展開に一致することから、$e^{ix} = \cos x + i \sin x$ が示せます。[*4]

(5) **ロピタルの定理**を（大雑把ですが）示しましょう。
$f(x), g(x)$ を $x = a$ のまわりでテイラー展開し、$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dfrac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \cdots$, $g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + \dfrac{1}{2}g''(a)(x-a)^2 + \cdots$ とします。ここで定理の仮定に従って $f(a) = 0, g(a) = 0$ ですから、

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \cdots}{g'(a)(x-a) + \frac{1}{2}g''(a)(x-a)^2 + \cdots} = \frac{f'(a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a) + \cdots}{g'(a) + \frac{1}{2}g''(a)(x-a) + \cdots}$$

と書け、両辺で $x \to a$ とすると、$\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$ となって定理が示せます。

[*4] $e^x, \sin x, \cos x$ をマクローリン展開するときの収束半径は ∞ なので（後述）、それぞれの関数はそれぞれのマクローリン展開に（任意の x に対して）完全に一致します。

(6) $f(x) = \frac{1}{1-x}$ とおくと $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ となります。[*5] これより $f^{(n)}(0) = n!$ が得られ、$f(x)$ のマクローリン展開は次のようになります。

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \quad \blacksquare$$

例題 (6) の結果は**等比級数の和の公式**と完全に一致していますね。ここで、$|x| < 1$ でなければ右辺の**和が収束しない**ことに注意して下さい。テイラー展開は級数の形をしており、それが収束してくれる x の範囲を考慮する必要があります。

1.3 ダランベールの収束半径

話を簡単にするためマクローリン展開が可能な x の範囲を考えます。

d'Alembert(ダランベール)の収束半径 R

定理 1.4 べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径 R は、次のように求められる。

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

$f(x)$ は $|x| < R$ の範囲でマクローリン展開できる。

$R \to \infty$ となった場合「どんな実数 x に対してもマクローリン展開可能」が言えます。[*6] また、$x \to x - a$ と書き換えることで $x = a$ のまわりのテイラー展開の収束半径が得られます。上の主張が成り立つことを証明しておきましょう。

(証明) 正項級数和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ $(b_n > 0)$ の収束性について次が成り立ちます。

正項級数の収束性

定理 1.5 $r = \lim_{n \to \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n}$ に対して $0 \leq r < 1$ ならば $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ は収束する。

[*5] 一応帰納法で示しておくと、$n = 0$ で O.K. $n = k > 0$ で $f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ が成立するなら $f^{(k+1)}(x) = \frac{(k+1)!}{(1-x)^{k+2}}$ となるはずです。実際、$n = k + 1$ において $f^{(k+1)(x)} = \frac{d}{dx} f^{(k)}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{-k!(k+1)(-1)(1-x)^k}{(1-x)^{2k+2}}\right) = \frac{(k+1)!}{(1-x)^{k+2}}$ となり、予想が正しいことが示されます。

[*6] ちなみに収束半径の取り方はこれに限らず、$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^m$ の収束半径として $R = \lim_{n \to \infty} (a_n)^{1/n}$ と取ることもできます(**コーシーの収束半径**)。これが収束半径となることも、ダランベールの収束半径同様に決まります。証明も同様です。

この事実[*7] を用いて証明を開始します。三角不等式[*8] より

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| \tag{1.1}$$

が成り立ち、式 (1.1) 右辺が収束するなら左辺の収束が言えます。[*9] ここで、先の主張において $b_n = |a_n x^n|$ とおくと、$r = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|x|$ であり、$0 \leq r < 1$ ならば $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ が収束することが言えるので、

$$|x| < \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

のとき「$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ が収束」⇒「$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が絶対収束」が言えます。□

例題

(1)　e^x をマクローリン展開したときの収束半径を求めよ。

(2)　$\log(1+x)$ のマクローリン展開は次で与えられる。$\log(1+x)$ の収束半径を求めよ。

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

(3)　$\frac{1}{1-x}$ をマクローリン展開したときの収束半径を求めよ。

解答

[*7] 一応この事実が成り立つことを（大雑把ですが）示しておきましょう。十分大きく有限な N に対し、$n > N$ のとき $r \approx \frac{b_{n+1}}{b_n}$ と書けたとします。正項級数和を

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \underbrace{\sum_{n=0}^{N} b_n}_{\text{有限}} + \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n$$

と分けたとき、右辺第一項は（N がたかだか有限なので）有限な値を取ります。一方で右辺第二項について考えてみましょう。$n > N$ では $b_{n+1} \approx rb_n$ と見なせたので、このとき b_n は $b_n \approx r^{n-N} b_N$ のような等比数列と見なせます。これより右辺第二項の和は

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} b_n \approx \sum_{n=N+1}^{\infty} b_N r^{n-N} = (\text{等比級数の和})$$

となり収束することがわかります。これより $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ は収束することがわかります。□

[*8] $|a+b| \leq |a| + |b|$

[*9] これを絶対収束と言います。

(1)　$a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(0) = \frac{1}{n!}$ より $R = \lim_{n\to\infty}(n+1) \to \infty$ より、x がどんな実数でも e^x はマクローリン展開可能です。

(2)　$a_n = \frac{1}{n}(-1)^{n+1}$ により、$R = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1$ が得られるので、$\log(1+x)$ は $-1 < x < 1$ においてのみマクローリン展開可能となります。

(3)　$a_n = 1$ となり $R = 1$ で、$-1 < x < 1$ の範囲でマクローリン展開できます。

その他有名なマクローリン展開

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n \quad (|x|<1)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n \quad (|x|<1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n \quad (|x|<1)$$

$$\mathrm{Tan}^{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} \quad (|x|<1)$$

$$\mathrm{Sin}^{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (|x|<1)$$

$$\binom{\alpha}{n} = \begin{cases} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} & (n \geq 1) \\ 1 & (n=0) \end{cases}, \quad n!! = \begin{cases} n(n-2)\cdots 2 & (n\ \text{偶数}) \\ n(n-2)\cdots 1 & (n\ \text{奇数}) \\ 1 & (n=0) \end{cases}$$

1.4　演習問題

1　実数 x に対し、次のような関係が成り立っている。

$$\sin x = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \times \cdots$$

このとき、級数の和

$$\zeta(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$$

を求めよ。

2　実数 $e^{1/5}$ を小数表示したものの小数点以下2桁目までを求めよ。

3　次の極限を求めよ。

$$\lim_{a\to 0}\left(\frac{\pi\cosh(\pi a)}{2a\sinh(\pi a)} - \frac{1}{2a^2}\right)$$

解答

1 まずは与えられた式を仮定して $\sin x$ の x^3 の項だけを取り出してみましょう。

$$\sin x = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) = x+x^3\left(-\frac{1}{\pi^2}-\frac{1}{4\pi^2}-\frac{1}{9\pi^2}-\cdots\right)+x^5\left(\cdots\right)+\cdots$$

上のように展開でき、$\sin x$ のマクローリン展開

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots$$

と比較すると

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

となることがわかります。

(注意) $\sin x = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$ が成り立つことを確認しておきます。因数定理

多項式 $f(x)$ が $f(a)=0$ をみたすなら $f(x)$ は $x-a$ で割り切れる。

を思い出しましょう。[*10] 整数 n に対して $\sin(n\pi)=0$ が成り立つので、

$$\sin x = (\text{定数}) \times x \times (x-\pi)\times(x+\pi)\times(x-2\pi)\times(x+2\pi)\times\cdots$$

のように書けるはずです。これを整理して定数 A を用いて

$$\sin x = Ax\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\times\cdots$$

と書くことができ、両辺を x で割って $x\to 0$ とすると $A=1$ が得られ、仮定した $\sin x$ の積展開式が求められます。

(注意) 実数 s に対して、次の正項級数和 $\zeta(s)$ が収束することを確認しておきます。

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

これを**リーマンのゼータ関数**と呼びます。$\zeta(s)$ は $s>1$ で収束されることが知られており、[*11] $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}, \zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}$ がよく知られています。$\zeta(4)$ は本問で x^5 の係数比較をすると示すことができ、同様にして順次 ζ(偶数) を求めることができます。

ところでこのゼータ関数は次章で紹介されるガンマ関数 $\Gamma(s)$ と結びつき、次の性質を持っていることが確かめられます。

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx = \zeta(s)\Gamma(s)$$

*10 $\sin x$ は多項式ではないので、因数定理が使えるかどうかは議論の余地がありますが . . .

*11 これは残念ながらダランベールの判定法では確かめられません。

2　e^x をマクローリン展開します。

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$$

ここで $x = 1/5$ として

$$e^{0.2} = 1 + 0.2 + \frac{1}{2}0.2^2 + \frac{1}{6}0.2^3 + \cdots = 1 + 0.2 + 0.02 + \frac{0.008}{6} + \cdots$$

となり、0.008/6 以降は十分小さいので無視して $e^{1/5} = 1.22...$ を得ます。

3　なにやら物々しい式です。項別に極限を取ると発散するので通分してロピタルの定理を使う必要がありますが $\cdots$
与式を通分して

$$\lim_{a\to 0}\left(\frac{\pi\cosh(\pi a)}{2a\sinh(\pi a)} - \frac{1}{2a^2}\right) = \lim_{a\to 0}\frac{\pi a\cosh(\pi a) - \sinh(\pi a)}{2a^2\sinh(\pi a)}$$

とし、ロピタルの定理を使い続けると

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \lim_{a\to 0}\frac{\pi a\cosh(\pi a) - \sinh(\pi a)}{2a^2\sinh(\pi a)} \\
&\overset{\text{ロピタル}}{=} \lim_{a\to 0}\frac{\pi^2 a\sinh(\pi a)}{4a\sinh(\pi a) + 2a^2\pi\cosh(\pi a)} \\
&\overset{\text{約分}}{=} \lim_{a\to 0}\frac{\pi^2\sinh\pi a}{4\sinh\pi a + 2a\pi\cosh\pi a} \\
&\overset{\text{ロピタル}}{=} \lim_{a\to 0}\frac{\pi^3\cosh\pi a}{6\pi\cosh\pi a + 2a\pi^2\sinh\pi a} = \frac{\pi^2}{6}
\end{aligned}$$

別解　テイラー展開の面目躍如です。双曲線関数のマクローリン展開 $\sinh x = x + \frac{1}{3!}x^3 + O(x^5), \cosh x = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + O(x^4)$ から

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \frac{\pi a\left(1 + \frac{1}{2}\pi^2 a^2 + O(a^4)\right) - \left(\pi a + \frac{1}{6}\pi^3 a^3 + O(a^5)\right)}{2a^2 \times \left(\pi a + \frac{\pi^3 a^3}{6} + O(a^5)\right)} \\
&= \frac{\frac{\pi^3 a^3}{3} + O(a^4)}{2\pi a^3\pi\left(1 + \frac{\pi^2 a^2}{6} + O(a^4)\right)} \to \frac{\frac{\pi^3 a^3}{3}}{2\pi a^3\pi} = \frac{\pi^2}{6}
\end{aligned}$$

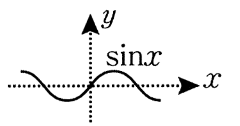
として求められます。最後に分母、分子それぞれで a^4 以上の項を無視しました。このようにテイラー展開を用いると近似値が簡単に求められることがわかります。■

3 の結果は後々留数定理の応用の章で使います。

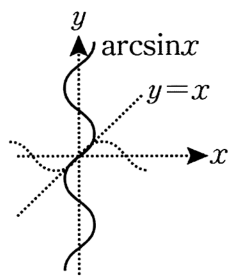
1.5　おまけ：逆関数、特に逆三角関数の取り扱いについて

1.5.1　逆関数の作り方

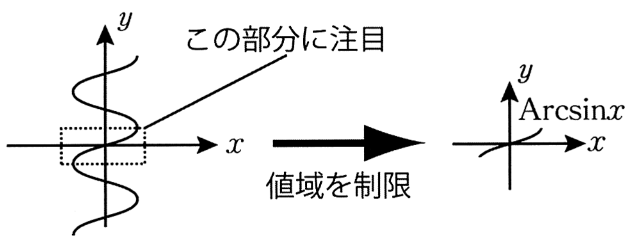
関数 $y = f(x)$ に対し、y と x を入れ替えて $x = f(y)$ としてから、これを $y = f^{-1}(x)$ のように表すとき、f^{-1} を f の**逆関数**と呼びます。例えば $y = f(x) = e^x$ のとき、x と y を入れ替えて $x = e^y$ とすると、$y = \log_e x = \ln x$ となります。*12



同様に三角関数 $\cos x, \sin x, \tan x$ の逆関数を"arc"をつけて arccos,arcsin,arctan と記します（あるいは単に $\cos^{-1}, \sin^{-1}, \tan^{-1}$ と記します）。arccos はアークコサインと呼びます。



さて、$f(x) = \sin x$ の逆関数を作ってみましょう。右上図のように、$y = \sin x$ を取り、$y = x$ を描いて右中図に対して折り返します。これで逆関数 $y =$arcsin$x$ が作れます。しかし図を見ればわかるように、$y =$arcsin$x$ はひとつ x を指定すれば複数の y が現れ、関数の定義「x の値に対し y が**ただひとつ**決まるとき、y を x の関数と呼ぶ」に反してしまいます。



そこで、図のように arcsin を関数として機能するように値域を制限します。*13このようにして得られた"関数"を Arcsin$x$ と書きます。頭文字を大文字で表して差別化するわけです。

例題　$-\dfrac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \dfrac{\pi}{2}$ とするとき、次の値を求めよ。

$$\tan^{-1} 1 + \tan^{-1} 2 + \tan^{-1} 3$$

---

*12 ln の"l"はLogarithm（対数）、"n"は Natural（自然な）を表します。自然対数のことです。どう読むのかわかりませんが、ln を"ローン"と呼ぶ人を見かけたことがあります。

*13 複素関数論でも説明しますが、これを「主値を取る」とか「枝を切る」と言います。

解答　$a=\tan^{-1}1, b=\tan^{-1}2, c=\tan^{-1}3$ とおき、$a+b+c$ を求めましょう。三角関数の加法定理を用います。

$$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}=\frac{1+2}{1-2}=-3$$

さらに

$$\tan(a+b+c)=\frac{\tan c+\tan(a+b)}{1-\tan c\tan(a+b)}=\frac{-3+3}{1-(-9)}=0$$

により $a+b+c=\pi+2n\pi$ (n は整数) となります。値域に注意して $-\frac{\pi}{2}<a,b,c<\frac{\pi}{2}$ より $-\frac{3\pi}{2}<a+b+c<\frac{3\pi}{2}$ となるから、結局 $a+b+c=\pi$ が得られます。■

1.5.2　逆関数の導関数

$y=f^{-1}(x)$ の導関数を求めるには、$x=f(y)$ に注意して

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{f'(y)}$$

とします。例えば $y=\mathrm{Arcsin}x$ を微分するには

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Arcsin}x=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

とすれば良いわけです。

例題　$\mathrm{Arctan}x$ の導関数を求めよ。

解答　先と同様です。

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Arctan}x=\frac{1}{(\tan y)'}=\cos^2 y=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$$

として答えが得られます。■

例題　$\ln x$ の導関数を求めよ。

解答　$(e^x)'=e^x$ を用います。逆関数の性質から $e^y=x$ なので

$$\frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{(e^y)'}=\frac{1}{e^y}=\frac{1}{x}$$

を得ます。■

第 2 章

定積分の技巧

世の中、高校レベルの知識では計算できない積分は山ほどあり、これらには後々「重積分」や「複素積分」などを応用して挑戦していくことになります。本章ではその手始めとして、基本的な定積分計算のテクニックを復習します。

2.1 置換積分の効用

置換積分や微分の性質をフルに使うことで簡単な公式を一般化できます。

例題

次の式（**ガウス積分**）が成り立つとする（証明は後述（p28）または重積分の章で）。

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

これを利用して、以下の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax^2}dx \quad (a > 0)$

(2) $\displaystyle\int_0^\infty x^{2n}e^{-ax^2}dx$

解答

(1) まず仮定された式 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ において、$t = \sqrt{a}x$ （ただし $a > 0$）とおく。積分範囲は $(x|0 \to \infty)$ となるので、$dt = \sqrt{a}dx$ と併せて両辺は $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax^2}\sqrt{a}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ と書ける。両辺を $\sqrt{a}$ で割れば答えを得る。

(2) (1) で得た式を a で微分すると、

$$\int_0^\infty \frac{d}{da}e^{-ax^2}dx = \frac{d}{da}\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \Rightarrow \int_0^\infty(-x^2)e^{-ax^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}^3}\right)$$

となり、このように a で微分することを繰り返していけば次のようになり

ます。

$$\int_0^\infty x^{2n}e^{-ax^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}^{2n+1}}\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}} \qquad \blacksquare$$

重要な積分公式を記しておきます。積分定数 C は省略しています。

不定積分の公式

$$\int f^n f' dx = \frac{1}{n+1}f^{n+1} \qquad \int \log x dx = x\log x - x$$

$$\int \frac{f'}{f}dx = \log f \qquad \int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \qquad \int \cos x dx = \sin x$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \log|x| \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} = \tan x$$

$$\int e^x dx = e^x \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \mathrm{Arcsin}\frac{x}{|a|}$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\log a}a^x \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \log|x+\sqrt{x^2+a^2}|$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\mathrm{Arcsin}\frac{x}{|a|}\right)$$

$$\int \sqrt{a^2+x^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2+x^2}+a^2\log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|\right)$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{Arctan}\frac{x}{a}$$

x と $\sqrt[n]{ax+b}$ $(a \neq 0)$ を含む有理式の積分：$t = \sqrt[n]{ax+b}$ とおく。

x と $\sqrt{ax^2+bx+c}$ を含み、$a>0$：$\sqrt{ax^2+bx+c} = t-\sqrt{a}x$ とおく。

x と $\sqrt{ax^2+bx+c}$ を含み ax^2+bx+c が実根 α, β をもつ：

$\to t = \sqrt{\dfrac{a(x-\beta)}{x-\alpha}}$ とおく。

2.2 瞬間部分積分

2つの関数 $f(x), g(x)$ の積 $f(x)g(x)$ を積分するために部分積分という技法があるのですが、これは公式で書くより次のように約束（バージョンアップ）したほうが効率が良いです。

微分すると $f(x)g(x)$ を含む関数を見つけて補正する。

具体例を交えて説明しましょう。

例題

(1) $x \sin x$ を不定積分せよ。
(2) $\log x$ を不定積分せよ。
(3) $e^x \sin x$ を積分せよ。

解答

(1) 微分すると $x \sin x$ を含む関数は $-x \cos x$ です。$(-x\cos x)' = x\sin x - \cos x$ なので、補正は $\cos x$ です。つまり、$x \sin x = (x\cos x)' + \cos x$ の両辺を積分すればよいので、答えは次のようになります。

$$\int x \sin x dx = x \cos x - \int \cos x dx = x \cos x - \sin x$$

(2) 微分すると $\log x$ を含むのは例えば $x \log x$ であり、補正は -1 です。つまり $\log x = (x \log x)' - 1$ なので、両辺を積分し、

$$\int \log x dx = x \log x - \int dx = x \log x - x$$

(3) 少し難しいですが

$$e^x \sin x = (-e^x \cos x)' + e^x \cos x$$
$$e^x \cos x = (e^x \sin x)' - e^x \sin x$$

により

$$e^x \sin x = (-e^x \cos x)' + (e^x \sin x)' - e^x \sin x$$

となり、これを両辺積分し、

$$\underline{\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}(-e^x \cos x + e^x \sin x)}$$

が得られます。■

はじめは難しいかも知れませんが、慣れると一瞬で部分積分が可能となります。

2.3 三角 → 指数関数のすり替え積分

13 ページで示したオイラーの公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

を使うため、複素数について準備します。実数 a, b を用いて $z = a + bi$ と書けるとき、a, b を z の実部、虚部と呼び、

$$a = \Re(z)\ ,\ b = \Im(z)$$

と書きます（$\Re$ は Re、$\Im$ は Im のようにも記します）。オイラーの公式によれば、

$$\cos x = \Re(e^{ix}) \ , \ \sin x = \Im(e^{ix})$$

が成立するので、sin や cos を e^{ix} にすり替えて積分するのが有効となります。

例題

(1)　$\displaystyle\int \sin x dx$ を求めよ。

(2)　$e^x \sin x$ の不定積分を求めよ。

解答

(1)　e^{ix} を積分して虚部を取ります。

$$\begin{aligned}\int e^{ix}dx = \int (\cos x + i \sin x) &= \left[\frac{1}{i}e^{ix}\right] \\ &= -ie^{ix} \\ &= -i(\cos x + i \sin x) \\ &= \sin x - i \cos x\end{aligned}$$

両辺の虚部を取って、$\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x$ を得ます。

(2)　$e^x \cdot e^{ix}$ を積分し、虚部を取ります。

$$\begin{aligned}\int e^{(1+i)x}dx &= \frac{1}{1+i}e^{(1+i)x} \\ &= \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}e^{(1+i)x} \\ &= \frac{1-i}{2}e^x e^{ix} \\ &= \frac{1-i}{2}e^x(\cos x + i \sin x) \\ &= \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)e^x + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)e^x i\end{aligned}$$

両辺の虚部を取ると $\displaystyle\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)$ を得ます。■

三角関数に比べて、指数関数は変数の加法が楽（加法定理が $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$ により一瞬にして計算できる）であることを知れば、積分にかかわらず三角関数を指数関数にすり替えて考える方法は非常に有用だと言えますね。

2.4 積分漸化式

関数列 $f_n(x)$ に対する積分列 $I_n = \int f_n(x)dx$ を計算する際、漸化式を作ると上手くいくケースが多いです。例えば

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta$$

について考えてみましょう。部分積分を用いて

$$\begin{aligned} I_n &= \Big[(-\cos\theta)\sin^{n-1}\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)(-\cos\theta)\cos\theta\sin^{n-2}\theta d\theta \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}\theta d\theta - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta d\theta = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \end{aligned}$$

となり、$I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$ が得られます。$I_0 = \frac{\pi}{2}, I_1 = 1$ であることから

$$I_n = \begin{cases} \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}I_1 & (n \text{ 奇}) \\ \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}I_0 & (n \text{ 偶}) \end{cases} = \begin{cases} \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3} & (n \text{ 奇}) \\ \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} & (n \text{ 偶}) \end{cases}$$

が得られます。

例題 自然数 n に対して次の $\Gamma(n)$ を求めよ。

$$\int_0^{\infty} t^{n-1}e^{-t}dt$$

解答 やはり部分積分を用いて

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} t^n e^{-t}dt = \Big[t^n(-e^{-t})\Big]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} nt^{n-1}(-e^{-t})dt = n\Gamma(n)$$

から $\Gamma(n) = (n-1)!$ が得られます。■

2.5 マクローリン展開して積分*

普通に考えると積分できなくても、工夫次第で求積可能な関数は相当数あり、その中の一つがこのテクニックです。次の積分値を求めてみましょう。

$$I = \int_0^{\infty} \frac{xdx}{e^x+1}$$

あらかじめ分子分母に e^{-x} をかけておきます。

$$I = \int_0^{\infty} \frac{xe^{-x}dx}{1+e^{-x}}$$

マクローリン展開 (あるいは無限等比級数) の公式の中に

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n$$

というのがあるのでこれを使います。$t = e^{-x}$ とおくと、$t = e^{-x}$ $(0 < x < \infty)$ は収束条件 $|t| < 1$ を満たしているので I を次のように書き換えることができます。

$$I = \int_0^{\infty} xe^{-x}\frac{1}{1+e^{-x}}dx = \int_0^{\infty} xe^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-nx}dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^{\infty} xe^{-(1+n)x}dx$$

最右部の積分は瞬間部分積分の応用で、$\dfrac{1}{(n+1)^2}$ として求められます。実際 $(1+n)x = X$ と置換して

$$\int_0^{\infty} x^{-(1+n)x}dx = \frac{1}{(n+1)^2}\int_0^{\infty} Xe^{-X}dX = \frac{1}{(n+1)^2}$$

となり、結果として

$$I = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$$

が得られます。この級数の和はフーリエ級数の応用で求めることができ、$I = \dfrac{\pi^2}{12}$ と決着づけることができます。

例題

次の関係が成立することを示せ。

$$\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{e^x - 1}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\beta$$

ただし、次の関係を用いよ。

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\ ,\quad \beta \equiv \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$$

解答　この積分は統計力学で登場します。前問とほぼ同じなので簡潔に説明します。求めるべき積分を I とおきます。被積分関数の分子分母に e^{-x} をかけておき、$t = \sqrt{x}$ とおきます。マクローリン展開で

$$\frac{1}{1-e^{-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$$

となることを使えば

$$I = \int_0^{\infty}\frac{\sqrt{x}e^{-x}}{1-e^{-x}}dx = \int_0^{\infty} 2t^2\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(1+n)t^2}dt = \int_0^{\infty} e^{-X^2}dX\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1+n)^{3/2}}$$

と書けます。ただし、最後に部分積分および $X=\sqrt{1+nt}$ としての置換積分を施しました。問題に与えられている関係を使えば、確かに $I=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\beta$ となることがわかります。

2.6 一般化して絞込み積分*

一度特定のパラメータを導入して一般化し、計算した後でパラメータの値を固定する方法です。具体的には

$$I=\int_0^\infty \frac{x}{(e^x+1)^2}dx\ ,\quad J=\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^4)^n}$$

などを対象に考えます。両者の共通項は被積分関数の分母全体が自乗されていることで、そのまま積分しようとするとドロ沼です。これらを簡略化し、分母を一般化した

$$f_a(x)=\frac{x}{e^x+a}\ ,\quad g_a(x)=\frac{1}{a+x^4}$$

を用意しておき、それぞれを $[0,\infty]$ で積分してから a で微分すると、所望の値を引き出すことができます。

2.7 微分方程式に帰着させる*

具体例をひとつ。次の積分を計算してみましょう。

$$f(t)=\int_0^\infty e^{-x^2}\cos tx dx\ ,t\geq 0$$

ここで $f(t)$ を t で微分し、[*1]部分積分で変形します。

$$\frac{d}{dt}f(t)=\int_0^\infty e^{-x^2}(-x\sin tx)dx=\left[\frac{1}{2}e^{-x^2}\sin tx\right]_0^\infty-\frac{t}{2}\int_0^\infty e^{-x^2}\cos tx dx=-\frac{t}{2}f(t)$$

これで微分方程式 $f'(t)=-\dfrac{t}{2}f(t)$ が得られました。これを解くと[*2] $f(t)=f(0)e^{-t^2/4}$ となることから、ガウス積分 $f(0)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を用いて $f(t)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-t^2}$ となりますね。

この手法を応用してガウス積分の値を求めてみましょう。

[*1] 右辺は、正しくは偏微分になります。

[*2] 微分方程式の基礎の章で取り上げる**変数分離**の手法を用います。微分方程式両辺を

$$\frac{df}{f}=-\frac{1}{2}tdt$$

と見立てて両辺 $t:0\to t$ で定積分し、$\ln f(t)-\ln f(0)=-\dfrac{t^2}{4}$ として対数を外せば $f(t)=f(0)e^{-t^2/4}$ が得られます。

例題 $f(t) = \left(\int_0^t e^{-x^2} dx\right)^2$, $g(t) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+x^2)t^2}}{1+x^2} dx$ とする。

(1) すべての t に対し $f'(t) + g'(t) = 0$ を示せ。

(2) ガウス積分の値を求めよ。

解答

(1) 一般に、関数 $F(x)$ の微分と積分の間に $\frac{d}{dt}\int_0^t F(x)dx = F(t)$ が成り立つことに気をつけて $f(t)$ を微分すると

$$f'(t) = 2e^{-t^2}\int_0^t e^{-x^2} dx$$

が成り立ち、一方で

$$g'(t) = \int_0^1 -2te^{-(1+x^2)t^2} dx = -2te^{-t^2}\int_0^1 e^{-x^2t^2} dx = -2e^{t^2}\int_0^t e^{-u^2} du$$

となり（最後に $xt \to u$ と置換しました)、$f'(t) + g'(t) = 0$ を得ます。

(2) 微分方程式 $f' + g' = 0$ により $f(t) + g(t) =$(定数) とわかります。ここで特に $f(0) + g(0) = f(\infty) + g(\infty)$ に注意しましょう。$f(0) = 0, g(\infty) = 0$ に気づけば、$f(\infty) = g(0)$、すなわち

$$\left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx\right)^2 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

が得られます。右辺の積分は $x = \tan\theta$ とおくことで

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi}{4}$$

となり、めでたくガウス積分 $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ が求められました。■

ガウス積分は重積分の章の最後に再び現れます。そこではより一層簡単に計算できることが示されます。

2.8 定積分によって定義される関数 Γ, B

定積分によって定義される特殊な関数、特にガンマ関数とベータ関数を扱います。

2.8.1 ガンマ関数

Γ 関数は次のように定義されます。

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx \quad (s > 0) \tag{2.1}$$

また、この関数は次の性質を持っています。[*3]

ガンマ関数の性質

定理 2.1 次が成り立つ。

(1) $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$
(2) $\Gamma(1) = 1, \Gamma(n) = (n-1)! \ \ (n \in \mathbf{N})$
(3) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$
(4) $\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s+1}{2}) = 2^{1-s}\sqrt{\pi}\Gamma(s)$
(5) $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \dfrac{\pi}{\sin \pi s}$

(1) は部分積分によって証明できます。(2) については、$s \in \mathbf{R}$ を $n \in \mathbf{N}$ に置き換えれば明らかに成り立ち、$n = 1$ とすれば $\int_0^\infty e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_0^\infty = 1$ により成立が確かめられます。(3) は

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty e^{-x}\sqrt{x}dx = 2\int_0^\infty e^{-t^2} dt \quad (x = t^2 \text{で置換積分})$$

で与えられますが、右辺はガウス積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ によって求めることができ、決着をつけることができます。(4) は複素積分のテクニックを用いて示せます (これはすぐ後のベータ関数を用いて示します)。(5) の証明は省きます。

2.8.2 ベータ関数

B 関数は

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx \tag{2.2}$$

で定義される関数[*4]で、以下の性質を持っています。

---

*3 $\Gamma(s)$ が $s > 0$ で収束することは優関数 e^{-px} $(0 < p < 1)$ と積分比較すれば容易にわかるでしょう。

*4 $B(p, q)$ は $p, q \geq 1$ のときは普通の連続関数ですが、p, q の少なくともどちらかが区間 $(0, 1)$ にあるときには広義積分として扱わねば収束性を保障できません。

ベータ関数の性質

定理 2.2

(1) $B(p,q)=B(q,p)$

(2) $B(p,q+1)=\dfrac{q}{p}B(p+1,q)$

(3) $B(p,q)=2\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta d\theta$

(4) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^a\theta\cos^b\theta d\theta=\frac{1}{2}B\left(\frac{a+1}{2},\frac{b+1}{2}\right)$

(5) $B(p,q)=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}dx$

(1)〜(4) は置換積分や部分積分で容易に証明できます。(5) は右辺で $t=\dfrac{x}{1+x}$ とおいて置換積分するとうまく証明できます。

ここで、ガンマ関数とベータ関数を結びつける次の便利公式を紹介します。

ベータ関数とガンマ関数の関係

定理 2.3 次が成り立つ。

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

（証明）$\Gamma(p)\Gamma(q)=B(p,q)\Gamma(p+q)$ を示します。

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q)&=\int_0^{\infty}t^{p-1}e^{-t}dt\int_0^{\infty}s^{q-1}e^{-s}ds\\&=\int_0^{\infty}dt\int_0^{\infty}dse^{-(t+s)}t^{p-1}s^{q-1}\ \left(u=t+s,v=\frac{t}{t+s}\text{とおいて置換}\right)\\&=\int_0^{\infty}due^{-u}u^{p+q-1}\int_0^1 dvv^{p-1}(1-v)^{q-1}=\Gamma(p+q)B(p,q)\quad\square\end{aligned}$$

これを用いてガンマ関数の性質 (5) を示しましょう。複素積分を用いて得られる 12.10 ページの式 (12.11) の左辺はベータ関数の性質 (5) で $p=a,q=1-a$ としたものと一致するので、

$$\frac{\pi}{\sin a\pi}=B(a,1-a)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(1-a)}{\Gamma(1)}$$

が得られ、ガンマ関数の性質 (5) が得られます。

例題　次の積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\cos^3\theta d\theta$

(2) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^6}$

解答 ガンマ関数とベータ関数の性質をフル活用します。

(1)

$$(\text{与式}) = \frac{1}{2}B\left(\frac{1+4}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{9}{2})} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{2}{35}$$

(2) $x = t^{1/6}$ と置換して

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^6} &= \frac{1}{6}\int_0^\infty \frac{t^{-5/6}}{1+t}dt \\
&= \frac{1}{6}B\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right) \\
&= \frac{1}{6}\frac{\Gamma(1/6)\Gamma(5/6)}{\Gamma(\frac{1}{6}+\frac{5}{6})} \\
&= \frac{1}{6}\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right) \\
&= \frac{1}{6}\cdot\frac{\pi}{\sin(\pi/6)} \\
&= \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

として答えを得ます。■

2.9 演習問題

1 $x > 0$ に対して広義積分 $G(x) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-xt}\frac{\sin t}{t}dt$ を求めよ。

2 実数 x に対して $f(x) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2-x^2/t^2}dt$ を求めよ。

3 次の定積分を計算せよ。ただし $s > 1$ とする。

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}dx$$

解答

1 $G'(x) = -\displaystyle\int_0^\infty e^{-xt}\sin t dt$ とし、右辺を計算しましょう。$\sin t = \Im e^{it}$ より

$$G'(x) = -\Im\int_0^\infty e^{-xt}e^{it}dt = -\Im\frac{1}{x-i} = -\frac{1}{1+x^2}$$

とし、両辺を積分します。下で $X = \tan\theta$ とおいて置換しています。

$$\begin{aligned}
G(x) - G(\infty) = \int_\infty^x G'(X)dX = -\int_\infty^x \frac{1}{1+X^2}dX = -\int_{\mathrm{Arctan}\infty}^{\mathrm{Arctan}x} d\theta \\
= -\mathrm{Arctan}x + \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

となって、$G(\infty)=0$ に気づけば答えが得られます。■
余談ですが、これより $G(0)$ を考えることで

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}$$

が得られます。

2　$f(x)$ を微分し、$=\tau=x/t$ とおいて置換積分します。

$$f'(x)=\int_0^\infty \frac{-2x}{t^2}e^{-t^2-x^2/t^2}dt=-2\int_0^\infty e^{-\tau^2-x^2/\tau^2}d\tau=2f(x)$$

となり $f(x)=f(0)e^{-2x}$ を得ます。最後に $f(0)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ より $f(x)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2x}$ となります。

3　マクローリン展開 $\dfrac{1}{1-e^{-x}}=1+e^{-x}+e^{-2x}+\cdots$ を用いて積分します。[*5]

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int_0^\infty \frac{x^{s-1}e^{-x}}{1-e^{-x}}dx=\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\sum_{n=0}^\infty e^{-nx}dx\\
&=\sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty x^{s-1}e^{-(n+1)x}dx\\
&=\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+1)^s}\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx \quad \left((n+1)x\to x \text{ と置換した}\right)\\
&=\zeta(s)\Gamma(s)
\end{aligned}$$

となり、答えは $\zeta(s)\Gamma(s)$ となります。$\zeta(s)$ はゼータ関数です。■

*5 $\dfrac{1}{1-e^x}=1+e^x+e^{2x}+\cdots$ とすると $x\to\infty$ でマクローリン展開が発散してしまうのでダメです。マクローリン展開は収束性に気をつけて用いましょう。

第 3 章

偏微分

3.1 偏微分

複数の変数による関数について、唯一つの変数のみ変動を許して、他の変数を固定して微分することを偏微分と呼び、例えば $f(x,y,z)$ について、y,z を固定して x を動かし、f を x で偏微分した関数を

$$\frac{\partial f}{\partial x} := \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y,z)-f(x,y,z)}{h}$$

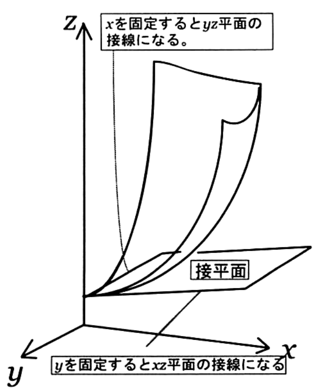
などと書いて f **の偏導関数**と呼びます。y,z についての偏微分も同様です。

また、x による f の偏導関数を特に f_x などと書く場合があります。高階偏導関数は

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}\ ,\ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = f_{zyx}$$

などと表します (**偏微分の順序に注意！**)。例えば $f(x,y) = x + \sin y$ に対して、f_x,f_y,f_{xy},f_{yx} を求めてみましょう。x と y で偏微分すると、それぞれ $f_x = 1$,$f_y = -\cos y$ となります。(x で偏微分するとき y は定数とみなされることに注意) さらに 2 階偏導関数はそれぞれ $f_{xy} = 0$、$f_{yx} = 0$ となって、偏微分の順序に関わらず 2 階偏微分が一致することがわかります。[*1]

3.2 全微分とその可能性



1 変数関数 $f(x)$ が微分可能であるとは、$f(x)$ の接線が引けるということです。これを 2 変数関数に拡張すると $z = f(x,y)$ が全微分可能 ⇔ 『$z = f(x,y)$ **の接平面が描ける**』となります。(x,y,z) の 3 次元空間で、平面の方程式は一般に実数 a,b,c を用いて

$$a(x-x_1) + b(y-y_1) + c(z-z_1) = 0 \qquad (3.1)$$

[*1] **一般に f_{xy} , f_{yx} がともに連続ならば $f_{xy} = f_{yx}$ が成立します (シュワルツの定理)**

と書けます。[*2] 式 (3.1) を変形して

$$z - z_1 = m(x - x_1) + n(y - y_1)$$

と書き直し、$y = y_1$ とすれば $z - z_1 = m(x - x_1)$ が得られます。微分を取れば $dz = mdx$ が得られます。$y = y_1$ に固定しているとき、接平面は接線になり、接線の傾きを考えれば $m = \dfrac{\partial z}{\partial x}$ が得られます。逆に x を x_1 に固定すると微分 $dz = ndy$ と、$n = \dfrac{\partial z}{\partial y}$ が得られます。このことから全微分は

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \tag{3.2}$$

と書けます。また、高階の全微分は

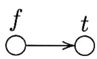
$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z \tag{3.3}$$

となります。

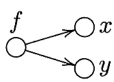
3.3　合成関数の微分

初心者には意外とややこしいので、次のようにルールを決めておきましょう。

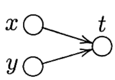
合成関数フローチャート

f が t のみの関数のとき、

のように f と t を連結する。

f が x, y の関数であるときは 

のように分岐させる。

x, y が t の関数のときは 

のように統合させる。

実際にこれを用いて合成関数の微分を求めてみます。

例題

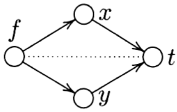
関数 f が x, y の関数であり、x, y が t の関数であるとき、$\dfrac{df}{dt}$ を求めよ。

解答

[*2] 平面上に定点 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (x_1, y_1, z_1)$、平面上の任意点 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (x, y, z)$ を用いて、平面の方程式が

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\vec{d_1} + t\vec{d_2}$$

(s, t は任意変数) と書け、平面の法線ベクトル $\vec{h} = (a, b, c)$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ の内積を取れば導けるでしょう。

フローチャートを描くと 

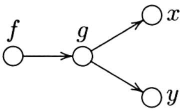
のようになり、$f \to x \to t$ と $f \to y \to t$ の 2 通りの道があります。**連結、統合では** $\dfrac{d}{d\bigcirc}$**、分岐では** $\dfrac{\partial}{\partial\bigcirc}$ を使ってまとめると $f \to x \to t$ は $\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{dx}{dt}$、$f \to y \to t$ は $\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$ で微分が与えられ、これを足して

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

が得られます。■

例題
f が g の関数であり、g が x, y の関数であるとき、$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ。

解答

フローチャートは 

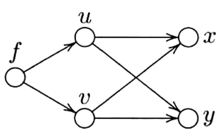
と描けるので、$f \to g \to x$ と $f \to g \to y$ の分岐について、ゴールが y のものを選べばよいです。

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{df}{dg}\frac{\partial g}{\partial y}$$

が得られます。全微分の式 (3.2) を両辺 dt で割った式であることを確かめておきましょう。■

例題
f が u, v の関数であり、u, v がどちらも x, y の関数であるとき、$\dfrac{\partial f}{\partial x}$、$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ を求めよ。

解答

フローチャートを 

のように描き分岐が 2 回あることに注意し、

$f \to u \to x$ の分は $\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}$、$f \to u \to y$ の分は $\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}$

$f \to v \to x$ の分は $\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}$、$f \to v \to y$ の分は $\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}$

となるので、これらから、ゴールが x となっている分だけ取り出して足せば

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \tag{3.4}$$

さらにゴールが y となっている分を取り出して足せば、

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \tag{3.5}$$

が得られます。■

3.4 ヤコビアン

二変数関数の置換積分（変数変換）を考えてみましょう。積分変数 x, y に対し $x = x(u,v), y = y(u,v)$ とおいて積分を書き換えるには、

$$dxdy = |J|dudv$$

と書けるような J が必要になります。

Jacobian（ヤコビアン）

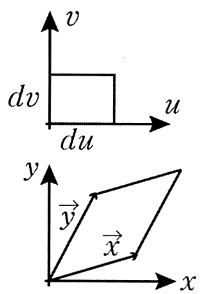
定理 3.1 $f(x,y)$ に対し $x = x(u,v), y = y(u,v)$ とおいて変数変換をするとき、

$$dxdy = |J|dudv$$

と書け、J を**ヤコビアン (Jacobi の行列式)** と言い、次のように表される。

$$J = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

式 (3.4)、(3.5) にならって、$z = f(x,y)$ とし、$x = x(u,v), y = y(u,v)$ とすれば全微分から



$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\ ,\ dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}}_{A\ \text{とおく}} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

が得られます。さて $\vec{u} = \begin{pmatrix} du \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ dv \end{pmatrix}, \vec{x} = A\vec{u}, \vec{y} = A\vec{v}$ とおきましょう。行列 A によって、微小長方形 $dudv$ は $\vec{x}$ と $\vec{y}$ のなす微小平行四辺形に写されます。この面積は[3]

$$dxdy = \left|\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\right|dudv$$

[3] ベクトル (a,b) と (c,d) のなす平行四辺形の面積が $|ac - bd|$ であることを思い出せば。

のように書け、両辺 $dudv$ で割るとヤコビアンが得られます。*4 3 次以上でも同様です。

例題
$f(x,y)$ について、$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおいたときのヤコビアンを求めよ。

解答　直接計算すると、

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} r\cos\theta & \dfrac{\partial}{\partial \theta} r\cos\theta \\ \dfrac{\partial}{\partial r} r\sin\theta & \dfrac{\partial}{\partial \theta} r\sin\theta \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r$$

が得られます。■

例題
$f(x,y,z)$ について、$x = r\sin\theta\cos\phi, y = r\sin\theta\sin\phi, z = r\sin\phi$ とおいたときのヤコビアンを求めよ。

解答　3 次元に拡張しても手法は同じです。*5

$$J = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \phi} \end{pmatrix} = r^2\sin\theta.$$

3.5　2 変数関数の Taylor 展開

基本的には 1 変数関数のテイラー展開と変わりません。まず $f(x,y)$ を展開するために、$z(t) = f(a+ht, b+kt)$(h,k は定数) とおきます。(さらに $x = a+ht, y = b+kt$ とおいておきます) z の全微分は式 (3.3) により

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z$$

であり、両辺 dt^n で割って、合成関数の微分の形として

$$\frac{d^n z}{dt^n} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)^n z = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n z \tag{3.6}$$

---

*4 こんな七面倒くさいことせずに全微分の式から $dxdy$ を計算して $dudv$ で割れば良い気がしますが、

$$dxdy = \left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right) = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}dudv + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}dvdu + \bigcirc dudu + \triangle dvdv$$

のようになってうまくいきません。これは $dudv$ と $dvdu$ の向き付けの問題に帰着されるのですが、これについてはベクトル解析の章で微分形式を取り扱う時に説明します。

*5 サラスの手法で展開します。

を得ます。さて式 (3.6) 左辺を用いたマクローリン展開は

$$z(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n z}{dt^n}\bigg|_{t=0} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{(n)}(0) t^n$$

であり、$t = 1$ として

$$z(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n z}{dt^n}\bigg|_{t=0} 1^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{(n)}(0) \tag{3.7}$$

となります。さらに式 (3.6) 右辺を用いたマクローリン展開は $t = 1$ において

$$f(a+h, b+k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n z}{dt^n}\bigg|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(a,b)$$

と書けます。さて、$t = 1$ なので、$h = x - a, k = y - b$ と書き直すことで最終的に

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left((x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial x} \right)^n f(a,b).$$

が得られます。これが 2 変数関数のテイラー展開です。(a, b は定数)

例題 $f(x,y) = e^{x-2y}$ を $(1,1)$ のまわりに $n = 2$ までテイラー展開せよ。

解答　ひたすら偏微分しておきます。$\frac{\partial}{\partial x} e^{x-2y} = e^{x-2y}$、$\frac{\partial}{\partial y} e^{x-2y} = -2e^{x-2y}$、$\frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{x-2y} = e^{x-2y}$、$\frac{\partial^2}{\partial y^2} e^{x-2y} = 4e^{x-2y}$、$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} e^{x-2y} = -2e^{x-2y}$、$e^{1-2} = \frac{1}{e}$ により、

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \sum_{n=0}^{2} \frac{1}{n!} \left((x-1)\frac{\partial}{\partial x} + (y-1)\frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(1,1) \\
&= f(1,1) + (x-1)\frac{\partial}{\partial x} f(1,1) + (y-1)\frac{\partial}{\partial y} f(1,1) \\
&\quad + \frac{1}{2}(x-1)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(1,1) + \frac{1}{2}(y-1)^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(1,1) + (x-1)(y-1)\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(1,1) \\
&= \frac{1}{e} + \frac{(x-1)}{e} - 2\frac{(y-1)}{e} + \frac{(x-1)^2}{2e} + \frac{2(y-1)^2}{e} - \frac{2(x-1)(y-1)}{e} \\
&= \underline{\frac{1}{2e}\Big(2 + 2(x-1) - 4(y-1) + (x-1)^2 + 4(y-1)^2 - 4(x-1)(y-1) \Big)}
\end{aligned}$$

となります。■

3.6 極値と最大最小問題

1 変数関数の微分を用いることで $y = f(x)$ の導関数 (傾き) から $f'(x) = 0$ となるとき、$f(x)$ の極値を求めることができましたが、これを拡張し、$z = f(x,y)$ の極値を求めるのが本節の目的です。

以下の主張は証明せずに使います。

極値を持つ必要十分条件

定理 3.2
$f(x,y)$ が (a,b) で極値を持つ必要条件は $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ である。
($f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ となる点 (a,b) を**停留点**と呼ぶ)

極大値と極小値

定理 3.3
ヘッシアン H を次の式で定義する。

$$H = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$$

このとき $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ ならば、極大極小の判定に関して次が成り立つ。

(1) $H(a,b) > 0$ のとき
$f_{xx}(a,b) > 0 \Rightarrow$ $f(x,y)$ は (a,b) で**極小値**$f(a,b)$ を持つ。
$f_{xx}(a,b) < 0 \Rightarrow$ $f(x,y)$ は (a,b) で**極大値**$f(a,b)$ を持つ。

(2) $H(a,b) < 0$ のとき
$f(x,y)$ は (a,b) で極値を持たない。

教科書によってはヘッシアンの符号が逆で定義される場合もあります。(その場合判断基準も逆になります)

例題
実関数 $f(x,y) = x^2 - 2y^2 + y^4$ の極大値、極小値を求めよ。

解答 まず $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ を満たす (a,b) を探します。
f_x, f_y はそれぞれ、

$$f_x(x,y) = 2x,\ f_y(x,y) = -4y + 4y^2$$

であるから、$(x,y) = (0,0), (0,-1), (0,1)$ において $f=0$ であり、これらが停留点とわかります。次に、これらについてヘッシアンを吟味します。

$$f_{xx} = 2,\ f_{yy} = -4 + 12y^2,\ f_{xy} = 0$$

により、ヘッシアン H は $H = 2(-4+12y^2) = 8(3y^2-1)$ となるので $H>0$ となるために $(x,y) = (0,\pm1)$ であり、$(x,y) = (0,0)$ は停留点ですが極値を与えません。

次に f_{xx} を吟味します。$f_{xx} = 2 > 0$ より $(0,\pm1)$ は極小値を与え、その値は $f(0,\pm1) = \underline{-1}$ です。また、この関数は<u>極大値を持ちません</u>。■

3.6.1　条件付極値とラグランジュの未定乗数法

$g(x,y)=0$ の条件のもとで $f(x,y)$ の極値を探すために次の定理を使います。

条件付極値とラグランジュの未定乗数法

定理 3.4
$f(x,y)$, $g(x,y)$ が連続な偏導関数を持つとする。$g(x,y)=0$ の条件下で $f(x,y)$ が (a,b) で
極値を持つならば、以下が成立する。(ただし $g_x(a,b), g_y(a,b)\neq 0$)

$$\begin{cases} f_x(a,b)-\lambda g_x(a,b)=0 \\ f_y(a,b)-\lambda g_y(a,b)=0 \\ g(a,b)=0 \end{cases}$$

(証明)f と g の全微分から $\frac{df}{dx}$, $\frac{dg}{dx}$ を考えると、

$$\frac{df}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

および

$$\frac{dg}{dx}=g_x(x,y)+g_y(x,y)\frac{dy}{dx}=0 \quad (\because g\equiv 0)^{*6}$$

を得て、特に $(x,y)=(a,b)$ のとき $\frac{d}{dx}f(a,b)=0$ なので $\frac{dy}{dx}$ を消去して、

$$\frac{f_x(a,b)}{g_x(a,b)}=\frac{f_y(a,b)}{g_y(a,b)}=\lambda \quad (\text{一定})$$

が得られます。□　これを使って極値を求めます。

例題
$x^2+xy+y^2-3=0$ の条件下で $f(x,y)=x^2+y^2$ の極値を全て求めよ。

解答　まず f_x, f_y を考えます。

$$f_x(x,y)=2x,\ f_y(x,y)=2y$$

次に $g(x,y)=x^2+xy+y^2-3$ とおいて g_x, g_y を考えます。

$$g_x(x,y)=2x+y,\ g_y(x,y)=x+2y$$

ラグランジュの未定乗数 λ を使って f_x, f_y, g_x, g_y をまとめると、

$$\begin{cases} f_x-\lambda g_x=2x-\lambda(2x+y)=0 \\ f_y-\lambda f_y=2y-\lambda(x+2y)=0 \end{cases}$$

[*6] g は恒等的に 0

を得ることができ、λ を消去して $y=\pm x$ を得ます。これを $x^2+xy+y^2-3=0$ に代入することで、$(x,y)=(\pm1,\pm1),(\pm\sqrt{3},\mp\sqrt{3})$ を得ます。これらが f の停留点です。

ヘッシアンは $h=4>0$ であり、$f_{xx}>0$ なので、停留点は全て極小値を与える点であり、それぞれ $f(\pm1,\pm1)=2, f(\pm\sqrt{3},\mp\sqrt{3})=6$ を得ます。■

3.7　汎関数と変分原理*

物理学では「自然は単純を好む」とよく言いますが、これを体現するのはまさしく最大最小問題です。ここでは具体的に汎関数の停留値問題（最大最小問題のこと）を考えてみましょう。関数 $L(x,\dot{x})$ は $x=x(t)$ なる関数を変数に持つとし、$x(t_1),x(t_2)$ は定数とします。$\dot{x}=dx/dt$ とし、この L についての積分を

$$I[x]=\int_{t_1}^{t_2}L(x,\dot{x})dt$$

とします。この I のように、「関数」の「関数」という入れ子構造を持った「関数」を**汎関数**と呼びます。まずは汎関数の微小変化 δI を考え、次のように式変形します。

$$\delta I=\delta\int_{t_1}^{t_2}L(x,\dot{x})dt=\int_{t_1}^{t_2}\delta L(x,\dot{x})dt$$

ここで δL は全微分であり、$\delta L=\dfrac{\partial L}{\partial x}\delta x+\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta\dot{x}$ です。積の微分の関係式 $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta x\right)=\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta x+\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta\dot{x}$ に注意して、δI を次のように書き換えます。

$$\delta I=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\delta x+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta x\right)dt=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\delta x dt+\underbrace{\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta x\right]_{t_1}^{t_2}}_{=0}$$

ここで $\delta I=0$ を要求すれば $\dfrac{\partial L}{\partial x}-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}=0$ が成り立つことがわかります。この式を**Euler-Lagrange**（オイラー・ラグランジュ）**方程式**と呼びます。ここまでの議論から、次の主張を得ます。

オイラー・ラグランジュ方程式

定理 3.5 $x(t_1),x(t_2)$ を定数とし、$x,\dot{x}$ を変数に持つ関数 $L(x,\dot{x})$ の積分

$$I=\int_{t_1}^{t_2}L(x,\dot{x})dt$$

に対して $\delta I=0$（変分原理）を要求すると次が成り立つ。

$$\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=0$$

これを**オイラー・ラグランジュ方程式**と呼ぶ。$L(x,\dot{x})$ を**Lagrangian**（ラグランジアン）と呼ぶ。

例題 正実数 m と、x の関数 $V(x)$ に対して $L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-V(x)$ と取る。このとき作用積分

$$I=\int_{t_1}^{t_2}L(x,\dot{x})dt$$

の停留条件から $x(t)$ の微分方程式を導け。

解答 オイラー・ラグランジュ方程式に $L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-V(x)$ を代入すると

$$m\ddot{x}(t)=-\frac{\partial V(x)}{\partial x}$$

が得られます。これは力学でおなじみの**ニュートンの運動方程式**ですね。■

このように、ラグランジアン L を適切に選ぶことで物理法則が得られます。例えば量子力学のシュレディンガー方程式や、電磁気学のマクスウェル方程式などもこの手法で導けます。

運動方程式に限らず、多粒子系の熱平衡状態がエントロピーの最大化によって再現されることから、変分原理を次のような問題に適用することもできます。

例題 $\sum_{\nu}p_\nu=1$ をみたす実数列 p_ν に対し次の**エントロピー汎関数** $S[p_\nu]$ を考える。

$$S[p_\nu]=-k\sum_{\nu}p_\nu\ln p_\nu$$

この $S[p_\nu]$ が最大となる p_ν を求めよ。ただし $k>0$ とする。

解答 ラグランジュの未定定数 λ に対し、$S[p_\nu]-\lambda\left(\sum_{\nu}p_\nu-1\right)$ を最大化します。汎関数微分[*7] に注意して

$$\frac{\partial}{\partial p_\mu}\left[S[p_\nu]-\lambda\left(\sum_{\nu}p_\nu-1\right)\right]=-k\ln p_\mu-k-\lambda=0$$

とし、$p_\mu=\exp\left(-\frac{k+\lambda}{k}\right)=$（定数）を得ます。$\sum_{\nu}p_\nu=1$ より、$p_\nu=\frac{1}{\sum_\nu}$ ととれば良いことがわかります。■ [*8]

[*7] 汎関数 $S[p_\nu]$ の p_μ に対する導関数 $\frac{\partial S[p_\nu]}{\partial p_\mu}$ を汎関数微分と呼び、$\frac{\partial}{\partial p_\mu}\sum_{\nu}f(p_\nu)=f'(p_\mu)$ が成り立ちます。

[*8] 適当なインデックス ν に対し、p_ν を確率とみたときの $S[p_\nu]$ を**シャノンエントロピー**（情報エントロピー）と言います。本問のように、p_ν についての束縛条件が $\sum_\nu p_\nu=1$ のみのとき、p_ν が定数となることを統計力学の言葉で**等重率の原理**と呼びます。また、こうして得られた確率分布のことを**ミクロカノニカル分布**と言います。p_ν についての束縛条件を増やして行くと、より拡張された物理系での確率分布（カノニカル分布、グランドカノニカル分布）が得られます。

3.8　演習問題

1　3次元ラプラシアンを $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ で定める。
ここで $x = r\sin\theta\cos\phi, y = r\sin\theta\sin\phi, z = r\cos\theta$ （3次元球座標）に変換したとき、Δ を r, θ, ϕ の微分で表せ。

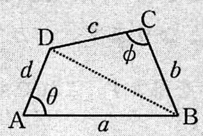
2　長さ a, b, c, d の4辺を持つ図の凸四辺形 ABCD を考える。(a, b, c, d は定数で、内角を変化させて考える)

(1)　∠A,∠C をそれぞれ θ, ϕ として、ABCD の面積を S を θ, ϕ で表せ。

(2)　θ と ϕ の間に成立する関係式を示せ。

(3)　$\theta + \phi = \pi$ のとき、S が最大になることを示せ。

(4)　S の最大値を a, b, c, d で表せ。



3　単調有界な正の実数列 E_ν, p_ν に対し、$\sum_\nu p_\nu E_\nu$ を実数 E とおく。E と $\sum_\nu p_\nu = 1$ が一定である条件で、次のエントロピー汎関数 $S[p_\nu]$ を最大化し、このときの p_ν を E_ν で表せ。ただし $k > 0$ とする。

$$S[p_\nu] = -k\sum_\nu p_\nu \log p_\nu$$

解答

1　直接球座標に変換すると泥沼です。ここでは直交座標 → 円筒座標 → 球座標の順で変換します。まず $x = \rho\cos\phi, y = \rho\sin\phi, z = z$（円筒座標）に変換しましょう。合成関数の微分より

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\phi\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{\sin\phi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi},\quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{\cos\phi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

となり、これより $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2}{\partial^2\phi}$ を得ます。さらに $\rho = r\sin\theta, z = r\cos\theta$ とおくと、上同様に合成関数の微分により

$$\frac{\partial}{\partial\rho} = \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta},\quad \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

となるので、三次元ラプラシアンの極座標表示が次のように得られます。

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

2　ラグランジュの未定定数法の問題です。

(1) $S = \triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{CDB}$ より $S = \dfrac{1}{2}(ad\sin\theta + bc\sin\phi)$ となります。

(2) (1) で取り上げた 2 つの三角形が共有する辺 BD に注目し、余弦定理から $\mathrm{BD}^2 = \underline{a^2 + d^2 + 2ad\cos\theta = b^2 + c^2 + 2bc\cos\phi}$ が得られ、これが求めるべき束縛条件となります。

以下では $g(\theta,\phi) = a^2 + d^2 + 2ad\cos\theta - \left(b^2 + c^2 + 2bc\cos\phi\right)$ とします。

(3) 未定定数 λ に対し、$f(\theta,\phi) = S(\theta,\phi) - \lambda g(\theta,\phi)$ を最大化しましょう。

$$\frac{\partial}{\partial\theta}f(\theta,\phi) = \frac{1}{2}ad\cos\theta + 2ad\lambda\sin\theta\ ,\quad \frac{\partial}{\partial\phi}f(\theta,\phi) = \frac{1}{2}bc\cos\phi - 2bc\lambda\sin\phi$$

より、$\tan\theta = -\dfrac{1}{4\lambda}, \tan\phi = \dfrac{1}{4\lambda}$ を得て、$\tan\theta + \tan\phi = \dfrac{\sin(\theta+\phi)}{\cos\theta\cos\phi} = 0$ より $\theta + \phi = \pi$ で $f(\theta,\phi)$ が極値を取ることがわかります。

(4) $\phi = \pi - \theta$ のとき S は最大値を取り、このとき $S(\theta, \pi - \theta) = \dfrac{1}{2}(ad + bc)\sin\theta$ となります。一方で $g(\theta, \pi - \theta) = 0$ から $\cos\theta = \dfrac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)}$ を得ます。これで $\sin\theta$ の値がわかり、S の最大値が次のようになります。

$$S = \frac{ad + bc}{2}\sqrt{\frac{4(ad + bc)^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)}{4(ad + bc)^2}}$$

3 適当なラグランジュの未定定数 λ, T を用いて

$$\tilde{S} \equiv S[p_\nu] - \lambda\left(\sum_\nu p_\nu - 1\right) - \frac{1}{T}\left(\sum_\nu p_\nu E_\nu - E\right)$$

を最大化しましょう。変分原理

$$\frac{\partial\tilde{S}}{\partial p_\mu} = -k\ln p_\mu - k - \lambda - \frac{E_\mu}{T} = 0$$

により $p_\nu \propto \exp(-E_\nu/kT)$ が得られます。■

これを**カノニカル分布**と呼びます。[*9] また、$\tilde{S}$ の二階微分を考えて $\dfrac{\partial^2\tilde{S}}{\partial p_\mu^2} = -\dfrac{k}{p_\mu} < 0$（グラフが上に凸）より、$p_\nu$ がカノニカル分布となることで S が最大化されることがわかります。

[*9] さらに束縛条件 $N = \sum_\nu p_\nu N_\nu$ を課すと、未定定数 μ に対して $p_\nu \propto e^{-(E_\nu - \mu N_\nu)/kT}$ が得られ、これを**グランドカノニカル分布**と言います。

第 4 章

続・定積分の技巧

多変数関数の定積分（重積分）を扱うことで立体の体積や表面積を求めることができるようになります。ここでは重積分に加え、実際に計算できない定積分を近似的に求める最急降下法のテクニックを紹介します。

4.1 累次積分とその基礎演習

約束事

$f(x,y)$ を $(x|a \to b)$ で積分し、さらに $(y|c \to d)$ で積分するとき、次のように書く。

$$\int_c^d dy \int_a^b dx f(x,y) \quad \left(= \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy \right)$$

積分したものをさらに積分するので、このような重積分を特に**累次積分**(逐次積分) と呼びます。$\int$ と dx で挟むのではなく、$\int dx$ を作用させるように $\int dxf(x)$ として書くと便利です。もちろん今までどおり $\int f(x)dx$ のスタイルで記述しても良いです。

例題　次の積分を求めよ。

$$\int_0^1 dy \int_0^2 dx x^2 y$$

解答　まず x で積分して

$$\int_0^2 dx x^2 y = \frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^2 y = \frac{8}{3}y$$

さらに右辺を y で積分して

$$\int_0^1 dy \frac{8}{3}y = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{2}\left[y^2\right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

例題　次の積分を求めよ。

$$\int_0^1 dy \int_y^{y+1} dxxy$$

解答　順番を間違えないようにしましょう。まず x で積分します。

$$\int_y^{y+1} dx(xy) = \frac{1}{2}y\left[x^2\right]_y^{y+1} = \frac{y}{2}(2y+1)$$

次に y で積分します。

$$\int_0^1 dy\frac{1}{2}(2y^2+y) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{12}$$

例題　次の積分を求めよ。

$$\iint_D dxdyx^2 \quad D = \{\,(x,y)\mid 0 \le x \le 1, 1 \le y \le 2\,\}$$

解答　領域 D を分解すれば普通の累次積分になります。

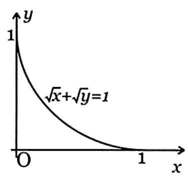
$$\iint_D dxdyx^2 = \int_1^2 dy \int_0^1 dxx^2 = \int_0^1 dy\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \int_0^1 dy\frac{7}{3} = \frac{7}{3}$$

例題　次の積分を求めよ。

$$\iint_D dxdy\sqrt{y} \quad D : \sqrt{x}+\sqrt{y} \le 1$$

解答

領域を図示し、積分範囲を決めます。図より $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$ であり、かつ領域 D の不等式から $y \le (1-\sqrt{x})^2$ であるから、まず $(y|0 \to (1-\sqrt{x})^2)$ で積分し、次に $(x|0 \to 1)$ で積分します。[*1]



$$\begin{aligned}\iint_D dxdy\sqrt{y} &= \int_0^1 dx \int_0^{(1-\sqrt{x})^2} dy\sqrt{y} \\ &= \int_0^1 dx\left[\frac{2}{3}(y)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{(1-\sqrt{x})^2} \\ &= \int_0^1 dx\frac{2}{3}(1-\sqrt{x})^3 \\ &= \int_0^1 dx\left(1-3\sqrt{x}+3x-\sqrt{x}^3\right) = \frac{1}{10}\end{aligned}$$

[*1] 途中で $t = 1-\sqrt{x}$ と置換するとベータ関数になり計算が楽になります。

を得ます。

例題 次の積分を求めよ。

$$\iiint_D zdxdydz \quad D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq z \leq 1-x-y$$

解答 3次元になっても基本は変わりません。シバリのきつい z から積分していきます。

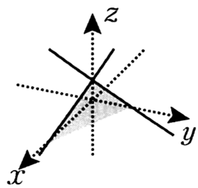
$$\begin{aligned}\iiint_D zdxdydz &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} zdz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^{1-x-y} \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{2}(1-x-y)^2 \\ &= \int_0^1 dx \frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{3}(1-x)^3 \\ &= \left[\frac{1}{24}(1-x)^4\right]_0^1 = \frac{-1}{24}\end{aligned}$$

となり、答えを得ます。

例題 次の積分を求めよ。

$$\iiint_D ydxdydz \qquad D: x, y, z \geq 0,\ x+2y+3z \leq 6$$

解答 積分範囲を自分で決定しなければならないので領域を図示します。境界は平面の方程式 $x+2y+3z=6$ なので、$x=0$ として $2y+3z=6$ を yz 平面に、$y=0$ として $x+3z=6$ を xz 平面に、$z=0$ として $x+2y=6$ を xy 平面に描けば領域がわかります。



まず立体図について、$0 \leq z$ と $x+2y+3z \leq 6$ から z を消去して積分範囲を

$$\left(z \middle| 0 \to \frac{6-x-2y}{3}\right)$$

とし、次に平面図について、$0 \leq y$ と $x+2y \leq 6$ から y を消去して、積分範囲は

$$\left(y \middle| 0 \to \frac{6-x}{2}\right)$$

となり、最後に x は $0 \leq x$ および $x \leq 6$ から、積分範囲が

$$(x|0 \to 6)$$

となるので、与式は以下のように求められます。

$$
\begin{aligned}
\iiint_D ydxdydz &= \int_0^6 dx \int_0^{\frac{6-x}{2}} dy \int_0^{\frac{6-x-2y}{3}} ydz \\
&= \int_0^6 dx \int_0^{\frac{6-x}{2}} dy \cdot y\Big[z\Big]_0^{\frac{6-x-2y}{3}} \\
&= \int_0^6 dx \int_0^{\frac{6-x}{2}} dy \cdot y\left(\frac{6-x-2y}{3}\right) \\
&= \int_0^6 dx \left[\frac{6-x}{3}\frac{1}{2}y^2 - \frac{2}{9}y^3\right]_0^{\frac{6-x}{2}} \\
&= \int_0^6 dx \frac{1}{72}(6-x)^3 \\
&= -\frac{1}{72}\left[\frac{1}{4}(6-x)^4\right]_0^6 = \frac{9}{2}
\end{aligned}
$$

4.2 変数変換

この項では置換積分の多変数バージョンとしての変数変換を扱います。ここでは偏微分の節で導いたヤコビアンを使います。

極座標変換

直交座標から極座標への変数変換は以下の通りになる。
$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta \quad (0 < r, 0 \le \theta < 2\pi)$ のとき、

$$dxdy = rdrd\theta$$

$x = r\sin\theta\cos\phi, y = r\sin\theta\sin\phi, z = r\cos\theta \quad (0 < r, 0 \le \theta < \pi, 0 \le \phi < 2\pi)$ のとき、

$$dxdydz = r^2 \sin\theta drd\theta d\phi$$

非常に多くの計算で現れるので最重要項目です。暗記に値します。ヤコビアンの導出は偏微分の項でやっているので省略します。次の主張もすでに前章で示しましたね。

重積分の変数変換

x, y から u, v に変数変換するとき、$f(x,y) = g(u,v)$ ならば、次の関係によって重積分を変換できる。

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} g(u,v)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

例題 半径 a の球の体積を求めよ。

解答 球の微小体積を dV とします。dV を球全体で集めたのが球の体積 V で

あり、$V=\int dV$ という図式はすぐに思いつくでしょう。球の微小体積 $dV = r^2\sin\theta drd\theta d\phi$ と書けるので、これで累次積分して

$$
\begin{aligned}
V = \iiint_V dV &= \int_0^a dr\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi} d\phi r^2\sin\theta \\
&= \int_0^a drr^2\int_0^\pi \sin\theta d\theta\int_0^{2\pi} d\phi \\
&= \frac{1}{3}a^3\cdot 2\cdot 2\pi = \frac{4\pi}{3}a^3
\end{aligned}
$$

が得られます。■ ちなみに、円の面積は $\int_0^a\int_0^{2\pi} rdrd\theta = \pi a^2$ となります。

例題　次の積分を求めよ

$$
\iint_D x^2dxdy \qquad D=\{\,(x,y)\mid x^2+y^2\le x\,\}
$$

解答　領域 D が、中心 $(\frac{1}{2},0)$、半径 $\frac{1}{2}$ の円であることに気をつけて $x-\frac{1}{2}=r\cos\theta, y=r\sin\theta$　$(0\le r\le\frac{1}{2}, 0\le\theta\le 2\pi)$ とおくと上手くいきます。$dxdy=rdrd\theta$ に注意。

$$
\begin{aligned}
\iint_D x^2dxdy &= \int_0^{1/2} dr\int_0^{2\pi} d\theta r\cdot(r\cos\theta+\tfrac{1}{2})^2 \\
&= \int_0^{1/2} dr\int_0^{2\pi} d\theta(r^3\cos^2\theta + r^2\cos\theta+\tfrac{1}{4}r) \\
&= \int_0^{1/2} dr\left(\frac{1}{4}\pi r^4+\frac{1}{2}\pi r^2\right) = \pi\left(\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^4}\right) = \frac{5\pi}{64}
\end{aligned}
$$

として答えが得られます。■

4.3　ガウスの積分

本節の締めくくりに重要公式を証明します。一変数関数の積分ですが、以前までの初等的な技術では求積不能であり、重積分を知って初めてその証明が可能となります。

ガウスの積分

定理 4.1 次の関係が成立する。

$$
\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}
$$

極座標で攻めるか直線で攻めるかの 2 通りのパターンがあります。まずは極座標で考えてみます。$I=\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ とおき、I^2 を考えます。

$$
I^2 = \int_0^\infty dxe^{-x^2}\int_0^\infty dye^{-y^2}
$$

ここで I の片方を変数 y の積分で表しました。累次積分の逆を考えると、

$$I^2 = \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy e^{-(x^2+y^2)}$$

と書けます。積分領域は第一象現全体であり、極座標で表すと、

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta \quad ,(r|0 \to \infty),(\theta|0 \to \tfrac{\pi}{2})$$

と書き表せ、ヤコビアンは r となるので、I^2 は

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^\infty dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta r e^{-r^2} \\ &= \int_0^\infty r e^{-r^2} dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\ &= \frac{\pi}{2}\left[\frac{-1}{2}e^{-r^2}\right]_0^\infty \\ &= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

と書けることになり、$I > 0$ により $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ であることが確かめられます。□ [*2]

[*2] **別解**を紹介しておきましょう。直線を使って考えるには、

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

について、

$$I^2 = \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy e^{-x^2-y^2}$$

を考え、ここで $(x,y) = (x,tx)$ $(y = tx)$ と置き、$dy = xdt$ となるように変数を書き換えます。はじめに x を固定しておいて、最後にまとめて累次積分すると、

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^\infty dx \int_0^\infty dt \cdot t e^{-(1+x^2)t^2} \\ &= \int_0^\infty dx \left[\frac{-1}{2(1+x^2)} e^{-(1+x^2)t^2}\right]_{t=0}^{t=\infty} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty dx \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{2}\Big[\mathrm{Arctan}(x)\Big]_0^\infty \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

となり、これより $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ が得られます。

4.4 漸近解析（最急降下法）*

次の定積分について考えましょう。

$$I(t) = \int_a^b e^{tf(x)} g(x) dx \tag{4.1}$$

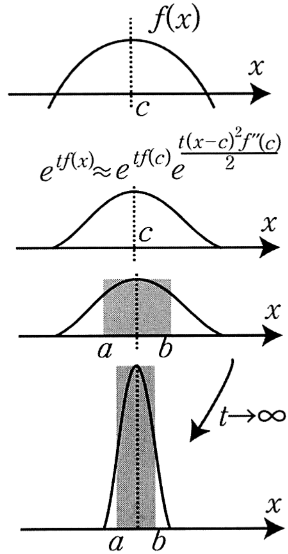


図 4.1 $t \to \infty$ でグラフが鋭くなり、区間 $[a, b]$ での面積も $[-\infty, \infty]$ での面積も大差なくなる

$g(x)$ を適当な関数とし、$f(x)$ を図のような形の関数とします。こんな積分が一般的に計算仕切れるわけもなく、ここではこの積分を $t \to \infty$ のもとでどんな風に振る舞うのか見て行きます。

$f(x)$ を上に凸な二次関数で近似します。すなわち $f'(x) = 0$ となる $x = c$ のまわりでテイラー展開し、

$$\begin{aligned} f(x) &= f(c) + \frac{f''(c)}{2}(x-c)^2 + O\big((x-c)^3\big) \\ &\approx f(c) + \frac{f''(c)}{2}(x-c)^2 \end{aligned}$$

とするわけです。$f(x)$ の形からわかるように $f''(c) < 0$ なので改めて

$$f(x) \approx f(c) - \frac{|f''(c)|}{2}(x-c)^2 \tag{4.2}$$

としましょう。

まずは $g(x) = 1$ の場合で考えてみます。式 (4.2) を式 (4.1) に代入し、$t \to \infty$ でグラフが鋭くなることから、区間 $[a, b]$ での面積が $[-\infty, \infty]$ での面積に近似できることを用いて次のように近似し、ガウス積分に帰着します。

$$\begin{aligned} I(t) &\overset{t\to\infty}{=} \int_a^b e^{tf(c)} e^{-\frac{t|f''(c)|}{2}(x-c)^2} dx \\ &\approx e^{tf(c)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\frac{|f''(c)|}{2}(x-c)^2} dx \\ &= e^{tf(c)} \sqrt{\frac{2\pi}{t|f''(c)|}} \end{aligned} \tag{4.3}$$

次に $g(x)$ を任意に取って考えてみましょう。このときは ϵ を小さな正数にとり、$t \to \infty$ のとき $\int_a^b \approx \int_{c-\epsilon}^{c+\epsilon}$ で近似できることを用いると

$$\begin{aligned} I(t) &\overset{t\to\infty}{=} \int_a^b g(x) e^{tf(c)} e^{-\frac{t|f''(c)|}{2}(x-c)^2} dx \\ &\approx \int_{c-\epsilon}^{c+\epsilon} g(x) e^{tf(c)} e^{-\frac{t|f''(c)|}{2}(x-c)^2} dx \\ &\approx g(c) \int_{c-\epsilon}^{c+\epsilon} e^{tf(c)} e^{-\frac{t|f''(c)|}{2}(x-c)^2} dx \\ &\approx g(c) \int_a^b e^{tf(c)} e^{-\frac{t|f''(c)|}{2}(x-c)^2} dx \end{aligned} \tag{4.4}$$

とすることができますね。最後に $\int_{c-\epsilon}^{c+\epsilon} \approx \int_a^b$ を用いました。これで式 (4.2) のときと同じ計算ができて、最終的に次の結果が得られます。

漸近解析の公式

定理 4.2 $t \to \infty$ において次が成り立つ。ただし $f'(c) = 0$ とする。

$$\int_a^b g(x)e^{tf(x)}dx \approx g(c)e^{tf(c)}\sqrt{\frac{2\pi}{t|f''(c)|}}$$

近似の仕方を精査すればもっと詳しい近似公式が作れますが、ここではこれで良しとしましょう。

例題 N を十分大きい自然数とすると、次が成り立つことを示せ。

$$N! \approx \sqrt{2\pi N}N^N e^{-N}$$

解答 これは**スターリングの公式**と呼ばれる重要公式です。$N!$ を積分表示するためにガンマ関数の性質を用います。

$$N! = \int_0^\infty e^{-x}x^N dx$$

ここで $x = Ny$ で置換し、$x^N = e^{N\log x}$ と書けることを用いると

$$N! = N^{N+1}\int_0^\infty e^{N(\log y - y)}dy$$

とします。ここで右辺最右部の積分を近似しましょう。$f(y) = \log y - y$ ととると、$f'(y) = \frac{1}{y} - 1 = 0$ を解いて $y = 1$ が得られるので $y = 1$ のまわりで展開して

$$f(y) = -1 - \frac{1}{2}(y-1)^2 + O\big((y-1)^3\big) \approx -1 - \frac{1}{2}(y-1)^2$$

と近似します。これを用いると

$$\int_0^\infty e^{N(\log y - y)}dy \approx \int_{-\infty}^\infty e^{-N-\frac{N(y-1)^2}{2}}dy = \sqrt{\frac{2\pi}{N}}e^{-N}$$

と書くことができ、最終的に N が十分大きいときに

$$N! \approx \sqrt{2\pi N}e^{-N}N^N$$

と書け、所望の式を得ます。■

4.5 演習問題

1 密度 ρ の一様な、体積 V の剛体（体積をもつ歪まない物体）について、z 軸のまわりにまわる剛体の慣性モーメント I は、次の式で与えられる。

$$I \equiv \iiint_V \rho(x^2+y^2)dxdydz$$

このとき、次の剛体の慣性モーメントをそれぞれ計算せよ。

(1) 半径 a の球。ただし z 軸は球中心を貫く

(2) 半径 a、高さ h の円柱。ただし z 軸は底面中心を垂直に貫く

2 半径 a の n **次元超球**を次のように定める。(a は実数とする)

- 体積は $V_n(r) = C_n a^n$ のように、数列 C_n を用いて書ける。
- 表面積は $S_n(r) = nC_n a^{n-1}$ のように書ける。

これらを用い、以下の問いに従って n 次元超球の体積 V_n を求めよ。

(1) 次の定積分の値をガウス積分を用いて計算せよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \exp\left[-a(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)\right]$$

(2) (1) の定積分を n 次元超球座標で積分することにより計算せよ。

(3) (1)(2) の結果から n 次元超球の体積 $V_n(r)$ を求めよ。

3 k, R を正の実数、d を自然数とする。次の積分を $R\to\infty$ で近似せよ。

$$I(R) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_0^{\infty} du \left(\frac{\pi}{u}\right)^{d/2} \exp\left(-\frac{R^2}{4u} - k^2 u\right)$$

解答

1 (1) 球座標 $x = r\sin\theta\cos\phi, y = r\sin\theta\sin\phi, z = r\cos\theta$ とおくと、微小体積は $dxdydz = drr^2 d\theta \sin\theta d\phi$ となり、

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V \rho(x^2+y^2)dxdydz = \int_0^a drr^2 \int_0^{\pi} d\theta\sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi(r^2\sin^2\theta) \\ &= \rho\int_0^a r^4 \int_0^{\pi} \sin^3\theta \int_0^{2\pi} d\phi \end{aligned}$$

となり、それぞれ

$$\int_0^a r^4 dr = \frac{1}{5}a^5, \int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta = \frac{4}{3}$$

より $\rho = \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi a^3}$ とおくと $I = \dfrac{2}{5}Ma^2$ が得られます。

(2) 円筒座標 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ を用います。微小体積は $dxdydz =$

$drrd\theta dz$ と書け、

$$I = \iiint_V \rho(x^2+y^2)dxdydz = \rho\int_0^a drr\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^h dzr^2$$
$$= \rho\int_0^a drr^3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^h dz = \frac{\pi h a^4}{2}\rho$$

が得られます。

2 (1) 単にガウス積分の n 乗です。

$$(\text{与式}) = \prod_{i=1}^{n}\left[\int_{-\infty}^{\infty}dx_i e^{-rx_i^2}\right] = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{n}{2}}$$

(2) n 次元球座標を動径座標 R と角座標 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{n-1}$ に極座標変換します。ここで角座標とヤコビアンを適当にまとめて

$$dx_1dx_2\cdots dx_n = r^{n-1}drd\Omega$$

と書くことにしましょう。[*3] すると与式は

$$(\text{与式}) = \int_0^{\infty}drr^{n-1}e^{-ar^2}\int d\Omega$$

と書け、$\int d\Omega$ は半径 1 の n 次元超球の表面積に一致し、S_n と書けるはずです。これより $t=r^2$ とおいて置換積分すると

$$(\text{与式}) = S_n\int_0^{\infty}drr^{n-1}e^{-ar^2}$$
$$= \frac{S_n}{2}\int_0^{\infty}dtt^{\frac{n}{2}-1}e^{-at}$$
$$= \frac{nC_n}{2}\frac{1}{a^{n/2}}\Gamma(\tfrac{n}{2})$$

となります。

(3) $C_n = \dfrac{a^{n/2}}{\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})}\times\left(\dfrac{\pi}{a}\right)^{\frac{n}{2}} = \dfrac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$ を得ます。これより求めるべき答えは $V_n = C_na^n = \dfrac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}a^n$ となります。■

[*3] n 次元球座標を例えば、$x_1 = r\cos\theta_1, x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2, \cdots,$
$x_{n-1} = r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}, x_n = r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}$ のようにおいてヤコビアンを求めると

$$J(r,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_{n-1}) = r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}$$

となります。これを用いて直接計算しても良いですが、角度の部分をひとまとまりにして計算すると見通しがよくなります。

3　$u = Rv$ とおくと

$$(\text{与式}) = \frac{1}{(2\pi)^d}\left(\frac{\pi}{R}\right)^{d/2} R \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\int_0^\infty \frac{1}{v^{d/2}} \exp\left[R\left(-\frac{1}{4v} - k^2 v\right)\right] dv}$$

と書け、右辺の積分を最急降下法で近似しましょう。$f(v) = -\dfrac{1}{4v} - k^2 v$ とおくと、$f'(v) = \dfrac{1}{4v^2} - k^2 = 0$ から $v = \dfrac{1}{2k}$ を得ます。この値のまわりでテイラー展開し

$$f(v) \approx -k - 2k^3\left(v - \frac{1}{2k}\right)^2$$

とし、ガウス積分を使うと

$$\underset{\sim\sim\sim\sim}{\text{波線部}} \approx \int_{-\infty}^\infty (2k)^{d/2} \exp\left[-kR - 2k^3 R\left(v - \frac{1}{2k}\right)^2\right] = (2k)^{d/2} e^{-kR} \times \sqrt{\frac{\pi}{2k^3 R}}$$

となり、結局与式は $R \to \infty$ で

$$(\text{与式}) \approx 2^{-\frac{d-1}{2}} (\pi R)^{-\frac{d-1}{2}} k^{-\frac{3}{2}} e^{-kR} \propto R^{-\frac{d-1}{2}} e^{-kR}$$

と近似できることがわかります。■

4.6　おまけ：拡張ガウス積分*

n 変数 $\boldsymbol{x} = x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ についてガウス積分を考えてみましょう。

拡張ガウス積分

定理 4.3 A を n 次の正則正方行列とする。このとき次が成り立つ。

$$\int_{-\infty}^\infty dx_1 \int_{-\infty}^\infty dx_2 \cdots \int_{-\infty}^\infty dx_n \exp\left[-\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}\right] = \sqrt{\frac{\pi^n}{\det A}}$$

ここで $\boldsymbol{x}^T = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ は $\boldsymbol{x}$ の転置ベクトルとする。

A を対角化し、ある正方行列 U を用いて

$$U^T A U = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

と書けるとしましょう。与式積分で $\boldsymbol{x} \to U\boldsymbol{x}$ と置き換えると

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \exp\left[-\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}\right] \\
=&\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \exp\left[-\boldsymbol{x}^T U^T AU\boldsymbol{x}\right] \\
=&\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \exp\left[-(\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2)\right] \\
=&\sqrt{\frac{\pi}{\lambda_1}} \times \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_2}} \times \cdots \times \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_n}} \\
=&\frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n}}
\end{aligned}
$$

と書け、$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = \det U^T AU = \det A$ を用いると求めるべき式が得られます。
□

第 5 章

常微分方程式の基本手順

x の関数 $y = f(x)$ と $g(x)$ によって $F(y, y', y'', \cdots, y^{(n)}, \cdots) = g(x)$ という形で記述される等式を**常微分方程式**と言い、本節では常微分方程式を解くためにいくつかの手法を紹介します。常微分方程式を解くとは、**常微分方程式を満たす関数** $y = f(x)$ **を具体的に求める**行為のことで、本節では特に、明快で有力な**変数分離法**を中心とした解法を紹介します。

5.1 常微分方程式の分類

上に記した微分方程式は抽象的すぎるので、具体的に定数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ によって

$$a_0 y + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \cdots + a_n \frac{d^n y}{dx^n} = g(x) \tag{5.1}$$

と表される微分方程式を考えることにします。これは $y, y', \cdots, y^{(n)}$ それぞれの 1 次の和で書け、**線形微分方程式**と呼ばれます。例えば $y^2 + \dfrac{dy}{dx} = x$ で記述される方程式などは非線形ということになります。最大階数 $\dfrac{d^n}{dx^n}$ に併せて、n **階線形微分方程式**とも言います。一般に n **階方程式を解くと** n **個の解と** n **個の積分定数が現れます。**

さらに $g(x)$ =(定数) のときに**斉次**(せいじ)**線形微分方程式**と呼び、$g(x) \neq$(定数) のときに**非斉次線型方程式**と呼びます。[*1]

また、微分方程式を満たす y の具体的な形 $f(x)$ を**微分方程式の解**と呼びます。上に記したように、n 階方程式を解くと n 個の未知定数が現れ、この未知定数を用いた解を**一般解**と呼び、未知定数を指定し終えた解を**特殊解**と呼びます。

例題 次の自由落下の運動方程式を解け。g は定数、$y(0) = h$、$y'(0) = 0$ とする。

$$m \frac{d^2}{dt^2} y(t) = -mg$$

[*1] **同次線形微分方程式**、**非同次線形微分方程式**とも呼ばれます。

解答 両辺を t で2回積分して次の式を得ます。

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + At + B$$

ただし A, B は不定積分によって現れた未知の積分定数とします。このように A, B が自然に現れたものの、具体的な値が指定されていないとき、y を**一般解**といいます。問題では $y'(0) = 0$、$y(0) = h$ とされているので $A = 0, B = h$ が得られ、これを再び一般解に代入すると

$$y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$$

という式が得られます。■

このように、未知の定数を指定した解 y を**特殊解**というわけです。

5.2 変数分離

非常に破壊力のある解法です。

戦略：変数分離

$\dfrac{dy}{dx} = f(y)g(x)$ の形の常微分方程式は**左辺に y の式、右辺に x の式**を集め

$$\frac{dy}{f(y)} = g(x)dx$$

の形に変形して両辺を積分する。

例題 次の方程式を前項によって分類して解け。ただし k は定数である。また、$N(0) = 2$ とする。

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

解答 これは一階斉次方程式です。左辺に N、右辺に t を集めて $\dfrac{dN}{N} = kdt$ とします。これを両辺積分し、

$$\log N = kt + C \qquad (C\text{:積分定数})$$

として、$N(t) = e^{kt+C}$ と変形します。$N(0) = e^C = 2$ となるので、特殊解が次のように得られます。

$$\underline{N(t) = 2e^{kt}}$$

この方程式は対数期の微生物増殖、薬やアルコールの吸収速度、考古学のサンプルの年代測定、水の加熱と冷却、速度に比例する粘性抵抗項をもつ運動方程式など、非常に多くの現象を表します。

例題　次の方程式を前節によって分類して解け。ただし k, a, b は正の定数であり、$x < a < b$ の範囲で考え、$x(0) = 0$ とせよ。

$$\frac{dx}{dt} = -k(a-x)(b-x)$$

解答　これは一階非線形方程式です。変数分離して $\frac{dx}{(x-a)(x-b)} = -kdt$ とし、部分分数分解して積分します。

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{b-a}\int \frac{(x-a)-(x-b)}{(x-a)(x-b)}dx = \int -kdt \\
&\Longleftrightarrow \int \frac{1}{x-b}dx - \int \frac{1}{x-a}dx = -(b-a)kt + (b-a)C \\
&\Longleftrightarrow \log \tfrac{|x-b|}{|x-a|} = -(b-a)(kt+C) \\
&\Longleftrightarrow \frac{x-b}{x-a} = \exp[-(b-a)(kt+C)]
\end{aligned}$$

これにより一般解は $x = \frac{b - ae^{-(b-a)(kt+C)}}{1 - e^{-(b-a)(kt+C)}}$ として得られ、$x(0) = 0$ より $c = \frac{1}{a-b}\log(b/a)$ となり、特殊解 $x(t) = \frac{1 - e^{-(b-a)kt}}{1 - \frac{b}{a}e^{-(b-a)kt}}b$ を得ます。この問題には次のような解き方もあります。

与式右辺を平方完成して、$\alpha = \frac{a+b}{2}, \beta = \frac{a-b}{2}$ とおくと与式は

$$\frac{dx}{dt} = k\left(\beta^2 - (x-\alpha)^2\right)$$

と書き換えられます。$x - \alpha = \beta\tanh\theta$ とおいて（このとき $dx = \frac{\beta}{\cosh^2\theta}d\theta$）さらに

$$\frac{\beta d\theta}{\cosh^2\theta dt} = k\frac{\beta^2}{\cosh^2\theta}$$

と書き換えられ、分母を払って積分し、

$$\int d\theta = \int \beta kdt \Longrightarrow \theta = k\beta t + C \quad (C: \text{積分定数})$$

を得ます。$x = \beta\tanh\theta + a$ に θ を代入して、$t = 0$ の条件で定数 C を消せば先ほどと同じ結果を得ることができます。この方程式は**ロジスティック方程式**[*2] と呼ばれ、家電製品の普及、速度二乗に比例する抵抗項を持つ運動方程式、化学反応、風邪の流行、ネズミの増殖などの現象を表します。

[*2] ふつうは、正の定数 a, p で $\frac{dx}{dt} = p\frac{a-x}{a}x$ と記述される方程式。

戦略：同次形

> $\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ の形の方程式は、$y = ux$ とおけば変数分離可能な方程式になる。

実際このようにおけば変数分離可能な方程式になるのは明らかですね。

例題

(1)　微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = 1 + \dfrac{y}{x}$ を解け。

(2)　微分方程式 $xyy' = y^2 + 4x^2$ を解け。ただし $y(1) = 0$ とせよ。

解答

(1)　微分方程式以外に条件がないので一般解のみを求めます。$y/x = u$ とおくと、与式は積の微分で

$$u + x\frac{du}{dx} = 1 + u \qquad \therefore \quad x\frac{du}{dx} = 1$$

両辺を変数分離して積分すると積分定数 C を用いて $u = \log|x| + C$ となり、$y = x(\log|x| + C)$ を得ます。

(2)　両辺を xy で割ると $y' = \dfrac{y}{x} + 4\dfrac{x}{y}$ と書き換えられるので $y/x = u$ とおくと

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{u^2+4}{u} \qquad \therefore \quad udu = 4\frac{dx}{x}$$

と書き換えられ、両辺積分して

$$\int udu = \frac{1}{2}u^2 \ , \quad \int \frac{4dx}{x} = 4\log|x| + C$$

より $y^2 = 8x^2 \ln x + C$ を得ます。$x = 1$ で $y = 0$ なので $C = 0$ となり、最終的に $y^2 = 8x^2 \ln x$ を得ます。(無理に $y =$ の形にしなくてもよい)■

5.3　定数変化法

戦略：ラグランジュの定数変化法

> 非斉次一階線形方程式
>
> $$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$
>
> の解を得るには、まず斉次形 $\dfrac{dy}{dx} + p(x)y = 0$ の一般解 y_s に現れる積分定数を関数 $u(x)$ にすり替えてから y_s を与式に代入し、$u(x)$ を特定する。

斉次形の方程式 $\dfrac{dy}{dx} = ky$ の解が、定数 C を用いて Ce^{kx} と書けることを使い、C を

関数 $u(x)$ に置き換えるという手法です。実際に解を導くことができることを示します。まず

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0$$

を変数分離して積分をとると $\log|y|=-\int p(x)dx+C$ が得られ、$\int p(x)dx=P(x)$、$C=u(x)$ とおくことで $y=e^{-P+u}$ と書け、これを x で微分した $\frac{dy}{dx}=(-p+u')e^{-P+u}$ と、先ほど求めた y を、元の方程式

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$$

に代入すると $(-p+u')e^{-P+u}+e^{-P+u}p=q$ より、$\frac{du}{dx}e^{u(x)}e^{-P(x)}=q(x)$ となり、再び変数分離可能な方程式となり $u(x)$ を求めることができます。

例題

(1) $\frac{dy}{dx}-2xy=-2x$ を解け。

(2) $\frac{dy}{dx}+\alpha y=Ce^{-kx}$ $\quad(\alpha,k,C$ は定数) を解け。

解答

(1) 斉次形 $\frac{dy}{dx}-2xy=0$ を変数分離して解くと $y=Ce^{x^2}$ が得られます。($e^Ce^{x^2}$ としても良い。本質的には同じ) ここで $C=u(x)$ とおいて微分方程式に代入し $y'=u'e^{x^2}+2xue^{x^2}$ となり、$y=u(x)e^{x^2}, y'=u'e^{x^2}+2xue^{x^2}$ を与式に代入して

$$\frac{du}{dx}e^{x^2}=-2x$$

を得ます。再び変数分離してこれを解き、$u(x)=e^{-x^2}+C'$ を得て、これを先ほどの $y=u(x)e^{x^2}$ に代入すれば $y(x)=C'e^{x^2}+1$ を得ます。C' は積分定数です。

(2) 斉次形 $y'+\alpha y=0$ の解は $y=ce^{-\alpha x}$ (c は積分定数) なので $c=u(x)$ と書き換えて得られる $y'=u'e^{-\alpha x}-\alpha ue^{-\alpha x}$ と $y=u(x)e^{-\alpha x}$ を与式に代入すれば $u'e^{-\alpha x}=Ce^{-kx}$ となり、変数分離して $du=Ce^{(\alpha-k)x}dx$ とし、これを積分して得られる $u(x)=\frac{C}{\alpha-k}e^{(\alpha-k)x}+c'$ (c' は積分定数) を $y=u(x)e^{-\alpha x}$ に代入し

$$y=\frac{C}{\alpha-k}e^{-kx}+c'e^{-\alpha x}$$

を得ます。■

5.4　斉次線形2階方程式

振動現象でよく現れる方程式です。

二階斉次方程式の解は指数関数の線形結合

定理 5.1 定数 a, b で表される次の微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0$$

の解は代数方程式 $t^2 + at + b = 0$ の 2 解 p, q と任意定数 C_1, C_2 で次のように表される。

$$y = C_1 e^{px} + C_2 e^{qx}$$

変数分離のご利益がここでも効いてきます。これまでの材料で証明してみましょう。任意定数 k を使って方程式を

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (a-k)\frac{dy}{dx} + k\frac{dy}{dx} + by = 0$$

と変形し、$(a-k) = \dfrac{b}{k} = \alpha$ と置いておきます (このとき $k = \dfrac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$ に固定)。すると、

$$\frac{d}{dx}\left\{\underline{\frac{dy}{dx} + \alpha y}\right\} = -k\left\{\underline{\frac{dy}{dx} + \alpha y}\right\}$$

と書き換えられ、下線部を f とおくと

$$\frac{df}{dx} = -kf\ ,\quad \frac{dy}{dx} + \alpha y = f$$

という 2 つの式が得られます。左の式は変数分離で $f = Ce^{-kx}$ (C は定数) として解け、右の方程式に代入すれば前ページの例 2. と全く同じ方程式となり、同様に解いて一般解は定数 c' を使って

$$y = \frac{C}{\alpha - k}e^{-kx} + c'e^{-\alpha x}$$

と書けます。ここで $\dfrac{C}{\alpha - k} = C_1$、$c' = C_2$ とおくと

$$y = C_1 e^{\frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}x} + C_2 e^{\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}x}$$

と書くことができ、$p = \frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$、$q = \frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$ なので主張が示せます。□

例題

(1) 方程式 $y'' + 3y' + 2 = 0$ を解け。

(2) 方程式 $y'' + ay' + by = 0$ において、$t^2 + at + b = 0$ の根が虚数 $c \pm i\omega$ ならば、一般解が

$$y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x \quad (C_1, C_2 \text{は定数})$$

の形で表されることを示せ。

(3) 単振動の方程式 $m\dfrac{dx^2}{dt^2} = -m\omega^2 x$ を解け。ただし $x(0) = 1, x'(0) = 0$ とせよ。

解答

(1) $t^2 + 3t + 2 = 0$ の 2 根は $-1, -2$ なので $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$ となります。

(2) オイラーの公式 $e^{i\omega x} = \cos \omega x + i \sin \omega x$ を使えば容易に示せます。

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{(c+i\omega)x} + C_2 e^{(c-i\omega)x} \\ &= C_1 e^c(\cos \omega x + i \sin \omega x) + C_2 e^c(\cos \omega x - i \sin \omega x) \\ &= (C_1 + C_2)e^c \cos \omega x + i(C_1 - C_2)e^c \sin \omega x \end{aligned}$$

と変形してそれぞれの係数を改めて C_1, C_2 と置きなおせばよいです。

(3) (2) によれば、一般解は $y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$ と書くことができ、$x(0) = 1, x'(0) = 0$ より $C_1 = 1, C_2 = 0$ となり、答えは $x(t) = \cos \omega t$ となります。
■

重根付き二階斉次方程式の解

定理 5.2 $t^2 + at + b = 0$ が重根 α を持つとき、方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} + a\dfrac{dy}{dx} + by = 0$ の一般解は

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2 x e^{\alpha x} \quad (C_1, C_2 \text{ は定数})$$

と表される。

先の定理によれば方程式の解は $Ce^{\alpha x}$ とわかりますが、2 階方程式の一般解は 2 つの独立な解を持たなければならず、これまでの方法では見つかりません。そこで無理矢理もう一つの線形独立な解をひねり出すために $y = C(x)e^{\alpha x}$ とおいて定数変化法を使います。元の方程式に代入して

$$\begin{aligned} &C''e^{\alpha x} + 2\alpha C'e^{\alpha x} + C\alpha^2 e^{\alpha x} + aC'e^{\alpha x} + a\alpha Ce^{\alpha x} + bCe^{\alpha x} = 0 \\ &\Leftrightarrow C'' + (2\alpha + a\alpha)C' + (\alpha^2 + a\alpha + b) = 0 \\ &\Leftrightarrow C'' = 0 \quad (\because \ \alpha = -\tfrac{a}{2}) \end{aligned}$$

となり、2 回積分して $C = C_1 + C_2 x$ と書け、主張を得ます。□

5.5　非斉次線形 2 階方程式

強制振動などを表す方程式を扱います。

戦略：非斉次方程式の解き方

非斉次線形 2 階方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = g(x)$$

を解くには、特殊解 $y_s(x)$ を見つけ、斉次形

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0$$

の一般解 $Y(x)$ を結合させ

$$y = y_s(x) + Y(x)$$

とすればもとの方程式の一般解となる。

特殊解の見つけ方ですが、次のように非斉次項に対応させると上手く行きます。

$$e^{ax} \to y_s(x) = Ae^{ax}$$
$$\sin ax, \cos ax \to y_s(x) = A\sin ax + B\cos ax$$
$$n \text{ 次多項式} \to y_s(x) = \ n \text{ 次多項式}$$
$$\text{ただし } A, B \text{ は定数}$$

この方程式はラプラス変換の項でも扱います。ここでは、上の戦略を頼りに、いくつかの例題を解いてみましょう。

例題

(1)　方程式 $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$ を解け。

(2)　方程式 $y'' - 4y = \sin x$ を解け。

解答

(1)　斉次形 $y''-3y'+2y=0$ の一般解は $y = C_1e^{x}+C_2e^{3x}$ となります。また、特殊解は $y_s(x) = Ae^{3x}$ とおけ、これを与式に代入すると $(9A-9A+2A)e^{3x} = e^{3x}$ となり、$A = \dfrac{1}{2}$ が得られ、一般解は

$$y(x) = \left\{C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}\right\} + \frac{1}{2}e^{3x}$$

となります。

(2)　斉次形 $y'' - 4y = 0$ の一般解は $Y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$ となります。特殊解を $y_s(x) = A\sin x + B\cos x$ とおくと、与式に代入して $(-A\sin x - B\cos x) -$

$4(A\sin x + B\cos x) = \sin x$ で係数比較して $A = -1/5, B = 0$ を得るので、求めるべき一般解は

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{5}\sin x$$

となります。■

5.6 複素数を導入する

力学の問題で、強制振動させるため力 $Fe^{i\omega t}$ を加えるという設定がよく行われます。$Fe^{i\omega t}$ が力そのものを表すのではなく、実部か虚部が表す力を拡張したに過ぎません。三角関数を $e^{i\theta}$ 関数に書き換えることで計算が楽になるのです。力学に限らず、このような置き換えは様々なジャンルで有効です。

例題 方程式 $y'' + 3y' + 2y = \sin t$ を解け。

解答 $y = \Im(z)$ と置き ($\Im(z)$ は z の虚部)、与式を

$$z'' + 3z' + 2z = e^{it}$$

と書き換えます。斉次形の一般解は $Z(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$ であり、特殊解を $z_s(t) = Ae^{it}$ と見込んで与式に代入すると $(-A + 3iA + 2A)e^{it} = e^{it}$ と書け、$A = \dfrac{1}{1+3i} = \dfrac{1-3i}{10}$ とわかり、一般解は $z(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + \dfrac{1-3i}{10}e^{it}$ と書け、両辺の虚部を取って

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + \frac{1}{10}\sin t - \frac{3}{10}\cos t$$

を得ます。■

5.7 連立微分方程式*

これまでの知識で次の問題について考えてみましょう。

例題 次の連立微分方程式を解け。

$$\frac{dx}{dt} = 4x - 2y, \frac{dy}{dt} = x + y$$

解答 変数を消去してしまいましょう。第一式を微分して

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 4\frac{dx}{dt} - 2\frac{dy}{dt}$$

とし、第二式を代入すると

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 4\frac{dx}{dt} - 2x - 2y = 5\frac{dx}{dt} - 6x$$

を得ます。最後に第一式を用いて y を消去しています。これを解くことで、適当な定数 c,d に対して $x(t)=ce^{3t}+de^{2t}$ となり、第一式に代入することで $y(t)=\frac{1}{2}ce^{3t}+de^{2t}$ を得ます。■

さて、このような方法でも良いですが、方程式が3つになるとちょっと面倒です。そこで、行列の固有値問題[*3] を応用すればもう少し見通しが良くなります。

先の例題を、$\boldsymbol{y}=(x,y), A=\begin{bmatrix}4 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ とおいて次のように書き換えましょう。

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{y}$$

これは変数分離形ですね。そこで定ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}e^{at}$ とおいて代入すると、$A\boldsymbol{x}=a\boldsymbol{x}$ となって**固有値問題**に帰着します。脚注の方法で A の固有値問題を解くと、固有値が $a=3,2$ と求められます。また、それぞれの固有値に対応する固有ベクトルが $(1,1/2)c,(1,1)d$（ただし c,d は定数）となり、

$$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}1\\ 1/2\end{pmatrix}ce^{3t}+\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}de^{2t}$$

として解が得られます。これは先の解と一致していますね。

---

*3 行列 A に対し、複素数成分のベクトル $\boldsymbol{x}$ と複素数 a が存在して、

$$A\boldsymbol{x}=a\boldsymbol{x}$$

と書けるとき、この式を固有値方程式と呼び、$\boldsymbol{x},a$ をそれぞれ A の**固有ベクトル**、**固有値**と呼びます。固有値問題とは、固有ベクトルと固有値を求める問題を指して言います。例えば、行列 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ の固有値問題を解いてみましょう。固有値方程式は

$$(A-aI)=O \qquad (\text{ただし } I \text{ は恒等行列})$$

と書け、$\det(A-aI)=0$ が言えます。これより、

$$\det\begin{bmatrix}1-a & 2\\ 2 & 1-a\end{bmatrix}=(a-1)^2-4=0$$

となり、$a=-1,3$ を得ます。固有値 $a=-1$ に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}=(x,y)$ とおいて固有値方程式 $A\boldsymbol{x}=a\boldsymbol{x}$ に代入すると $x=-y$ が得られ、適当な定数 x_0 に対し $\boldsymbol{x}=x_0(1,-1)$ と取れることがわかります。$a=3$ のときも同様に、$x=y$ が得られ、適当な定数 x_1 に対して $\boldsymbol{x}=x_1(1,1)$ と取れることがわかります。

ところで、固有ベクトルが $|\boldsymbol{x}|=1$ をみたすように取るとき、これを**規格化された固有ベクトル**と言います。先の固有ベクトルを規格化すると、それぞれ $(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2}),(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ となるわけです。

さらに、固有値を並べることで行列の**対角化**ができます。例えば、この A を対角化すると $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ となります。

5.8 演習問題

ここでは x を変数にもつ $y(x)$ の微分方程式について考え、$\dfrac{dy}{dx}$ を y' とも表す。

1 **Bernoulli（ベルヌーイ）型**の微分方程式について以下の問いに答えよ。

(1) 1 階微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = p(x)y(x) + q(x)y^{\alpha}$ $(\alpha \neq 0, 1)$ は変数変換 $u(x) = y^{1-\alpha}$ により線形方程式に帰着されることを示せ。

(2) 微分方程式 $4xy' + 2y = xy^5$ を解け。

2 1 階微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = p(x)y^2 + q(x)y(x) + r(x)$ は、何らかの方法で特解 $y(x) = y_0(x)$ を求めることができたとすれば、変数変換 $u(x) = y(x) - y_0(x)$ により、Bernoulli 型に帰着されることを示せ。これを**Riccati（リッカチ）型**の微分方程式と呼ぶ。

3 次の微分方程式を解け。

$$y'' = \sqrt{1 + y'^2},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

解答

1

(1) $u = y^{1-\alpha}$ とおくと $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^{\alpha}}{1-\alpha}\dfrac{du}{dx}$ となり、与式は

$$\frac{du}{dx} = (1-\alpha)p(x)u(x) + (1-\alpha)q(x)$$

となり、これは線形の常微分方程式ですね。

(2) 与式は $y' = -\dfrac{1}{2x}y + \dfrac{1}{4}y^5$ と書け、$\alpha = 5$、$p(x) = -\dfrac{1}{2x}$、$q(x) = \dfrac{1}{4}$ とすれば線形方程式に帰着され、$u(x) = y^{-4}$ とおくと

$$\frac{du}{dx} = \frac{2}{x}u - 1$$

と書けます。これは $u(x) = v(x)x$ とおけば変数分離形 $\dfrac{dv}{v-1} = \dfrac{dx}{x}$ に帰着され、定数 c に対して $v(x) = 1 + x^c$ と書け、$y(x) = \big(x(1+x^c)\big)^{1/4}$ が得られます。

2 リッカチ型方程式で $y = y_0 + u$ とおくと、

$$\cancel{\frac{dy_0}{dx}} + \frac{du}{dx} = \cancel{p(x)y_0^2} + 2y_0(x)u(x) + y_0(x)u^2(x) + \cancel{q(x)y_0(x)} + q(x)u(x) + \cancel{r(x)}$$

となり、残った項から

$$\frac{du}{dx} = \big(2y_0(x) + q(x)\big)u(x) + y_0(x)u^2(x)$$

となり、ベルヌーイ型に帰着できることがわかります。

3　非線形です。双曲線関数の馬脚が見えます。
与式を 2 乗し、$(y'')^2 = 1 + y'^2$ とし、両辺 x で微分すると

$$2y''y''' = 2y'y''$$

となり、$y''' = y'$ を得ます。$w = y'$ とおくと $w'' = w$ となり、この解は適当な定数 A, B を用いて

$$w = Ae^x + Be^{-x}$$

となります。これを積分し、さらに定数 C を用いて

$$y(x) = Ae^x - Be^{-x} + C$$

と書くことができます。ここで $y(0) = 1$ より $A - B + C = 0$ であり、$y'(0) = 0$ より $A = -B$ がわかります。これで $y(x) = Ae^x + Ae^{-x} + 1 - 2A$ が得られます。これを与式に戻すと $A = \pm\frac{1}{2}$ となり、

$$y(x) = \cosh x, -\cosh x + 2$$

を得ます。ここで $y'' = \sqrt{1 + (y')^2} \geq 0$ に注意すると、答えは $y(x) = \cosh x$ となります。■

第 6 章

常微分方程式のべき級数法

前章では変数分離を元手に微分方程式を解いていきましたが、それだけでは解が得られない問題もまた、ごまんとあります。応用上避けて通れない微分方程式たちを相手に、強制的に解を得る方法として『べき級数法』があります。これは、微分方程式の解をテイラー展開の形に仮定して、強制的に係数を求めるやり方です。

6.1 べき級数法

次の形の常微分方程式について考えましょう。$p(x), q(x)$ は任意の関数とします。

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + p(x)\frac{dy(x)}{dx} + q(x)y(x) = 0 \tag{6.1}$$

$p(x), q(x)$ は任意と書きましたが、実はこの仮定が厄介です。$p(x), q(x)$ の振る舞いで解き方が異なってくるからです。本章の、技法全体のフローチャートは次のようになっています。

特異点の分類 —(級数解の仮定)→ 漸化式を構成 —(漸化式を解く)→ 解の構成

$p(x), q(x)$ の形により、仮定される級数解の形が変わります。ひとまずその判断を占う道具立てをしておきましょう。

正則性と特異点

定義 6.1 $f(x)$ が $x = a$ のまわりにテイラー展開できるとき、$f(x)$ は $x = a$ で**正則**であるという。逆に $f(x)$ が $x = a$ でテイラー展開できないとき、a を**特異点**と呼ぶ。すなわち $f'(a)$ が有限な値に確定しないとき、a を特異点と呼ぶ。

特異点は複素関数論でも重要なキーワードになってきます。例えば $f(x) = \dfrac{1}{x}$ に対し $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ であり、$x = 0$ で発散します。また、$f(x) = \sqrt{x}$ も $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ となり、$x = 0$ で発散します。これらの関数に対し、$x = 0$ は特異点です。このように、$f(x)$ そのものが発散するかどうかではなく、導関数 $f'(x)$ が発散するかどうかで特異点が決まります。

確定特異点

定義 6.2 $p(x), q(x)$ にとって $x = a$ が特異点であり、かつ $p(x)(x-a), q(x)(x-a)^2$ が正則なとき、$x = a$ を**確定特異点**と呼ぶ。

さて、$p(x), q(x)$ が確定特異点を持つかどうかが議論の分かれ目なので、次のようにパターン分けをしておきましょう。

1. **$p(x), q(x)$ が常に正則なとき**
このときは簡単で、$f(x)$ は次のように展開できます。

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

2. **$p(x), q(x)$ が確定特異点 $x = a$ を持つとき**
$f(x)$ は次のように展開できます。

$$f(x) = (x-a)^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

ここで λ は微分方程式の形から決まります。

3. **その他**
1. でも 2. でもない場合、系統的な方法がないのでここでは取り扱いません。

主に二階の微分方程式を考えて行くわけですが、その際に線形独立な 2 つの解が自然に現れるはずです。2 つめの解が安直に得られない場合は、後述するフロベニウスの方法を用います。まずは簡単なケースから実際に計算してみましょう。

6.1.1 $p(x), q(x)$ が正則な場合

コトのはじめに適当な関数 $f(x)$ をマクローリン展開してみましょう。

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

これに対し $\dfrac{df(x)}{dx}, \dfrac{d^2 f(x)}{dx^2}$ をそれぞれ計算すると

$$\begin{aligned}
\frac{df(x)}{dx} &= \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{d}{dx}\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right) \\
&= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n \\
\frac{d^2 f(x)}{dx^2} &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n
\end{aligned}$$

となります。これを元手に、いくつか例題を解いてみましょう。

例題 次の微分方程式を解け。

$$\frac{df(x)}{dx} - f(x) = 0$$

ただし初期条件は $f(0) = 1$ とする。

解答 前章の内容から変数分離の手法ですぐに $f(x) = e^x$ とわかりますが、ここではべき級数法から示してみましょう。$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ とおくと

$$\begin{aligned}\frac{df(x)}{dx} - f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\Big((n+1)a_{n+1} - a_n\Big)x^n = 0\end{aligned}$$

となり、(x が任意なので) x のべきについて係数比較すると漸化式 $(n+1)a_{n+1} - a_n = 0$ が得られます。これより

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{n}a_{n-1} \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1}a_{n-2} \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} \times \cdots \times \frac{1}{1}a_0 = \frac{1}{n!}a_0\end{aligned}$$

となって漸化式が解け、$a_n = \frac{1}{n!}a_0$ が得られます。これにより、微分方程式の解が

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n = a_0 e^x$$

となって、[*1] 初期条件から $a_0 = 1$ とわかります。これで微分方程式が解けました。■

例題 $\frac{d^2}{dt^2}x(t) + x(t) = 0$ を解け。

解答 $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ とおき、与式を

$$\sum_{n=0}^{\infty}\{a_{n+2}(n+1)(n+2) + a_n\}x^n = 0$$

と書き換えます。{ } 内は 0 になるので、$a_{n+2} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)}a_n$ すなわち

$$a_n = \frac{-1}{n(n-1)} \cdot \frac{-1}{(n-2)(n-3)} \cdots \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{n!}a_1 & (n\ 奇数) \\ \dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{n!}a_0 & (n\ 偶数) \end{cases}$$

---

*1 指数関数のマクローリン展開 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ を用いました。

を得ます。$n = 2m+1, 2m$ で分ければ

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} t^{2m+1} a_1 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} t^{2m} a_0 = a_1 \sin t + a_0 \cos t$$

を得ます。*2 ■

6.1.2 確定特異点がある場合

実数 α、自然数 n に対して $f(x) = \dfrac{1}{(x-\alpha)^n} \times$（正則な関数）で与えられる関数 $f(x)$ について『**$f(x)$ は n 位の極 α を持つ**』と言います。極の性質は複素関数論の章でも触れます。ここでは名前だけ知っておいてください。さて、**$p(x)$ が一位の極を持ち、$q(x)$ が二位の極を持つ場合**を考えましょう。*3 考えるべきは確定特異点 $x = a$ を持つ微分方程式 (6.1)

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + p(x)\frac{dy(x)}{dx} + q(x)y(x) = 0 \qquad (6.1) 再掲$$

であり、$p(x), q(x)$ はそれぞれ p_k, q_k を展開係数として次のように展開できます。*4

$$p(x) = \frac{1}{x-a}\sum_{n=0}^{\infty} p_n (x-a)^n,\ q(x) = \frac{1}{(x-a)^2}\sum_{n=0}^{\infty} q_n (x-a)^n \qquad (6.2)$$

さて、このとき $y(x)$ が

$$y(x) = (x-a)^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \qquad (6.3)$$

と展開できるとして、a_n と λ をどう求めるかが問題となります。これまで同様に式 (6.2)、式 (6.3) を式 (6.1) に代入してみましょう。すると、

$$\begin{aligned} 0 = &\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+n)(\lambda+n-1) a_n (x-a)^{\lambda+n-2} \\ &+ \underline{\sum_{m=0}^{\infty} p_m (x-a)^{m-1} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+n) a_n (x-a)^{\lambda+n-1}} \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} q_m (x-a)^{m-2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^{\lambda+n} \end{aligned} \qquad (6.4)$$

*2 次の三角関数のマクローリン展開を用いました。

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

*3 このふたつの性質が揃ったときに、確定特異点を持つ、と言うのでした。

*4 これを**ローラン展開**と呼びます。複素関数論の章を参照してみてください。

と書けます。そこで、下線部や波線部に現れる二重級数の和の書き換えを次のように行います。

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n &= (a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots)(b_0 + b_1 x^1 + b_2 x^2 + \cdots) \\ &= a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1)x + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2)x^2 + \cdots \\ &= a_0 b_0 + \sum_{k=0}^{1} a_{1-k} b_k x + \sum_{k=0}^{2} a_{2-k} b_k x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k x^n \right\}\end{aligned}$$

これより式 (6.4) は次のように書き換えられます。

$$\begin{aligned}0 =& \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + n)(\lambda + n - 1) a_n (x - a)^{\lambda + n - 2} \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (\lambda + n - m) p_m a_{n-m} (x - a)^{\lambda + n - 2} \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} q_m a_{n-m} (x - a)^{\lambda + n - 2} \\ =& \sum_{n=0}^{\infty} (x - a)^{\lambda + n - 2} \left((\lambda + n)(\lambda + n - 1) a_n + \sum_{m=0}^{n} \left\{ (\lambda + n - m) p_m a_{n-m} + q_m a_{n-m} \right\} \right)\end{aligned} \tag{6.5}$$

そこで例によって $(x-a)^{\lambda+n-2}$ について係数比較すると

$$(\lambda + n)(\lambda + n - 1) a_n + \sum_{m=0}^{n} \underline{\left((\lambda + n - m) p_m a_{n-m} + q_m a_{n-m} \right)} = 0 \tag{6.6}$$

という関係式が得られます。さらに下線部において $m = 0$ の項だけに注目し、a_n の項をすべて取り出すと

$$\begin{aligned}&(\lambda + n)(\lambda + n - 1) a_n + \underline{\left((\lambda + n) p_0 a_n + q_0 a_n \right)} \\ =& a_n \underbrace{\left((\lambda + n)(\lambda + n - 1) + (\lambda + n) p_0 + q_0 \right)}_{\text{これを } D(\lambda+n) \text{ とおく}}\end{aligned}$$

となります。$n = 0$ のとき $a_0 \neq 0$ とすれば、$\boxed{D(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) + \lambda p_0 + q_0 = 0}$ が成り立つ必要があります。この式、$D(\lambda) = 0$ を**決定方程式**と呼びます。これを解いて λ が決まれば式 (6.3) に代入し、さらにそれを式 (6.1) に代入すれば、いつも通り a_n の漸化式が得られます。

ここで決定方程式の解を $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$ とおき、λ_1 を用いて解を

$$y_1(x) = (x - a)^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda_1)(x - a)^n \tag{6.7}$$

と構成できたとします。係数 a_n は λ_1 を含んでいるので $a_n(\lambda_1)$ と記述します。

さっそくこれで具体的に微分方程式が解けるようになるのですが、**決定式** $D(\lambda)=0$ **の根によっては線形独立な 2 つめの解**[*5] **が得られない場合があります。** $\lambda_1-\lambda_2$ が非整数のときは、2 つめの解を先と同様に

$$y_2(x)=(x-a)^{\lambda_2}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\lambda_2)(x-a)^n$$

と構成すれば良いのですが、そうでない場合は 2 つめの解が得られません。そこで、無理矢理線形独立なもうひとつの解をひねり出す方法を紹介します。[*6]

それよりさっさと実際に確定特異点つき微分方程式の解を（少なくともひとつ）求めることに興味のある読者は 75 ページに飛んで下さい。

6.2 フロベニウスの方法

決定方程式の根の差 $\lambda_1-\lambda_2=l$ が整数の場合（根が重根の場合を含む）、級数解を仮定して代入する方法だけでは微分方程式 (6.1) の、2 つの線形独立な解が得られません。そこで、次のように対処します。まず、式 (6.6) の下線部を $D_m(\lambda+n-m)a_{n-m}$ とおきます。すなわち、

$$D_m(\lambda)=\lambda p_m+q_m$$

とおくわけです。すると、式 (6.6) は $n=0,1,2,\cdots$ に対して連立方程式

$$\begin{cases}a_0D(\lambda)=0\\ a_1D(\lambda+1)+a_0D_1(\lambda)=0\\ a_2D(\lambda+2)+a_1D_1(\lambda+1)+a_0D_2(\lambda)=0\\ \qquad\qquad\vdots\end{cases}\tag{6.8}$$

で書き表されます。そこで、整数 $l=\lambda_1-\lambda_2$ を用いて任意定数 a_0 を $a_0=D(\lambda+l)$ととり、λ を変数としたままで式 (6.8) を解いて $a_n(\lambda)$ を求め、

$$y_2(x)=\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}y(\lambda)\right]_{\lambda=\lambda_2}=\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{(x-a)^{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}c_n(\lambda)(x-a)^n\right\}\right]_{\lambda=\lambda_2}$$

によって構成された $y_2(x)$ は、$y_1(x)$ と線形独立になります。このようにして $y_2(x)$ を得る手法を**Frobenius**（フロベニウス）**の方法**と言います。

あるいは、別の方法として $y_2(x)=y_1(x)u(x)$ とおいて、y_2 を微分方程式 (6.1) に代入し、$u(x)$ についての微分方程式を立て、$u(x)$ を求めることで $y_2(x)$ を得る方法もあります。これを**定数変化法**と言います。

---

*5 二階の微分方程式の一般解は、線形独立な 2 つの解から構成されるはずなのですが……。

*6 ちなみに 63 ページで扱ったように定数変化法を用いることもありますが、フロベニウスの方法と比べてどちらが有利かは問題によってまちまちです。

6.3 ガウスの超幾何微分方程式と合流型超幾何微分方程式

ここからは具体計算です。

例題 γ を非整数とする。ガウスの超幾何微分方程式

$$y'' + \frac{\gamma - (\alpha+\beta+1)x}{x(1-x)}y' - \frac{\alpha\beta}{x(1-x)}y = 0$$

において $x=0,1$ は確定特異点である。$x=0$ のまわりの級数解を求めよ。

解答 ちょっと解答が長いですが汎用性のある微分方程式です。与式を

$$x^2y'' + x\underbrace{\left\{\frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)x}{1-x}\right\}}_{\text{これを } p(x) \text{ とおく}} + \underbrace{\left(\frac{-x}{1-x}\alpha\beta\right)}_{\text{これを } q(x) \text{ とおく}} y = 0$$

と書き直し、ここでおいた $p(x), q(x)$ が $x=0$ で正則であることに注意して

$$y = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,\ p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n,\ q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

とおいて代入すると、[*7]

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\lambda)(n+\lambda-1)x^{n+\lambda-2} + x\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\lambda)x^{n+\lambda-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n\right)$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\lambda}\left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+\lambda}\left\{(n+\lambda)(n+\lambda-1)a_n + \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}a_k(k+\lambda) + \sum_{k=0}^{n} q_{n-k}a_k\right\} = 0$$

($x^{n+\lambda}$の係数) $=0$ であり、これに $n=0$ を代入すると

$$\Leftrightarrow \lambda(\lambda-1)a_0 + p_0a_0\lambda + q_0a_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda(p_0-1) + q_0 = 0$$

となって決定方程式が得られます。[*8] p_0 と q_0 を求めましょう。マクローリン展開

---

*7 このとき $y'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\lambda)(n+\lambda-1)x^{n+\lambda-2}, y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\lambda)x^{n+\lambda-1}$ となることに注意。

*8 途中で二重数列の和に対し

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = (a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots)(b_0 + b_1x^1 + b_2x^2 + \cdots)$$

$$= a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1)x + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2)x^2 + \cdots$$

$$= a_0b_0 + \sum_{k=0}^{1} a_{1-k}b_kx + \sum_{k=0}^{2} a_{2-k}b_kx^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}b_kx^n\right\}$$

と書き換えるテクニックを用いています。

$\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$ を用いると

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{\gamma - (\alpha+\beta+1)x}{1-x} = (1 + x + x^2 + \cdots)(\gamma - (\alpha+\beta+1)x) \\ &= \gamma + O(x) \\ q(x) &= \frac{-x}{1-x}\alpha\beta = -x(1 + x + x^2 + \cdots)\alpha\beta \end{aligned}$$

により $p_0 = \gamma, q_0 = 0$ となり、決定方程式が $\lambda^2 + \lambda(\gamma-1) = 0$ となります。これを解いて $\lambda = 0, \lambda = 1-\gamma$ が得られます。

(1)$\lambda = 0$ **のとき**　超幾何方程式を

$$x^2y'' + x\gamma y' = x^3y'' + (\alpha+\beta+1)x^2y' + \alpha\beta xy$$

と変形し、$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ とおいて代入すると

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \gamma n a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n)(n-1)x^{n+1} + (\alpha+\beta+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n+1} + \alpha\beta\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} \\ \Leftrightarrow &\sum_{n=0}^{\infty} \Big\{ n(n-1) + n\gamma \Big\} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \big(n(n-1) + (\alpha+\beta+1)n + \alpha\beta\big) x^{n+1} \end{aligned}$$

ここで左辺のインデックスをひとつずらして

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow &\sum_{n=0}^{\infty} \Big\{ (n+1)n + (n+1)\gamma \Big\} a_{n+1} x^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \big(n(n-1) + (\alpha+\beta+1)n + \alpha\beta\big) x^{n+1} \end{aligned}$$

とし、係数漸化式 $a_n = \dfrac{(\alpha+n-1)(\beta+n-1)}{n(\gamma+n-1)} a_{n-1}$ を得ます。ここで $[\alpha]_n \equiv \alpha(\alpha+1) \times \cdots \times (\alpha+n-1), [\alpha]_0 = 1$ とおくと $a_n = \dfrac{[\alpha]_n[\beta]_n}{n![\gamma]_n} a_0$ となり、超幾何方程式のひとつめの解は

$$y_1 = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\alpha]_n[\beta]_n}{n![\gamma]_n} x^n$$

となります。ここで $F(\alpha,\beta,\gamma;x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{[\alpha]_n[\beta]_n}{n![\gamma]_n} x^n$ とおくことにします。

(2)$\lambda = 1-\gamma$ **のとき**　もうひとつの解を $y_2 = x^{1-\gamma}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ とおき、超幾何方程

式に代入して b_n を求めます。超幾何方程式より

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(n+1-\gamma)(n-\gamma)+\gamma(n+1-\gamma)\right\}b_n x^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(n+1-\gamma)(n-\gamma)+(\alpha+\beta+1)(n+1-\gamma)+\alpha\beta\right\}b_n x^{n+1}$$

ここで左辺の係数をずらし

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(n+2-\gamma)(n+1-\gamma)+\gamma(n+2-\gamma)\right\}b_{n+1} x^{n+1}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(n+1-\gamma)(n-\gamma)+(\alpha+\beta+1)(n+1-\gamma)+\alpha\beta\right\}b_n x^{n+1}$$

とすることで係数漸化式 $b_n=\dfrac{(\alpha+n-\gamma)(\beta+n-\gamma)}{n(n+1-\gamma)}b_{n-1}$ を得て、$b_n=\dfrac{[\alpha+1-\gamma]_n[\beta+1-\gamma]_n}{n![2-\gamma]_n}b_0$ とわかります。この解は $x^{1-\gamma}F(1-\gamma+\alpha,1-\gamma+\beta,2-\gamma;x)$（の定数倍）で表されます。

以上の結果をまとめて、超幾何方程式の解が

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\alpha]_n[\beta]_n}{n![\gamma]_n}a_0x^n+x^{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\alpha+1-\gamma]_n[\beta+1-\gamma]_n}{n![2-\gamma]_n}b_0x^n \tag{6.9}$$

となることがわかりました。[*9] ■

長々と計算しましたが、超幾何関数はかなり便利な道具です。

例題 次の微分方程式を**合流型超幾何微分方程式**と呼ぶ。

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+(\gamma-x)\frac{dy}{dx}-\alpha y=0$$

$x=0$ まわりの級数解を求めよ。

解答 超幾何関数のご利益が効いてきます。超幾何方程式

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2}+(\gamma-(1+\alpha+\beta)z)\frac{dy}{dz}-\alpha\beta y=0$$

で $x=\beta z$ とおくと

$$x(1-\frac{x}{\beta})\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\gamma-\frac{1+\alpha+\beta}{\beta}x\right)\frac{dy}{dx}-\alpha y=0$$

となり、$\beta\to+\infty$ として合流型超幾何方程式を得ます。ここでガウスの超幾何方程式の解のひとつ

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\alpha]_n[\beta]_n}{n![\gamma]_n}x^n$$

[*9] ちなみに a_n, b_n ともに $\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|\to 1$ であり、この解の収束半径は 1 であることがわかります。

に対し、

$$y(x) \equiv F(\alpha, \gamma; x) \equiv \lim_{\beta\to\infty} F(\alpha, \beta, \gamma; x/\beta) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\gamma+n)} \frac{x^n}{n!}$$

が解となります。もう一方の解は $x^{1-\gamma} \lim_{\beta\to\infty} F(1+\alpha-\gamma, 1+\beta-\gamma, 2-\gamma; x/\beta)$ で表されます。■　応用上見逃せない特殊関数として**Legendre**(ルジャンドル)**多項式**、**Laguerre**(ラゲール)**多項式**、**Hermite**(エルミート)**多項式**などがありますが、これら特殊関数はほとんどガウスの超幾何多項式や合流型超幾何多項式の特殊な場合（α などを特定した場合）に現れます。

6.4　演習問題

ここでは次の**Bessel**(ベッセル)の微分方程式を取り上げます。

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0$$

[1]　ベッセルの微分方程式の原点周りの解を ν が非整数であるときに求めよ。

[2]*　ベッセルの微分方程式の原点周りの解を ν が整数であるときに求めよ。

解答

[1]　まずは λ を求めましょう。微分方程式 (6.1) と比較すると $p(x) = \dfrac{1}{x}, q(x) = 1 - \dfrac{\nu^2}{x^2}$ であり、式 (6.2) と比較すると $p_0 = 1, p_1 = p_2 = \cdots = 0, q_0 = -\nu^2, q_1 = 0, q_2 = 1, q_3 = 0, q_4 = 0, \cdots$ となり、決定方程式は $D(\lambda) = \lambda(\lambda-1) + \lambda \cdots 1 + (-\nu^2) = 0$ となり、$\lambda = \pm\nu$ を得ます。これにより、まず $\lambda = \nu$ に対する解が、

$$y_1(x) = x^\nu \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

とおけます。次に a_n を決定しましょう。

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\nu-2}(n+\nu)(n+\nu-1)$$

$$= x^{\nu-2}\nu(\nu-1)a_0 + x^{\nu-1}(\nu+1)\nu a_1 + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^{n+\nu}(n+\nu+2)(n+\nu+$$

$$\frac{1}{x}\frac{dy_1}{dx} = a_0\nu x^{\nu-2} + a_1(\nu+1)x^{\nu-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^{n+\nu}(n+\nu+2)$$

によりこの $y_1(x)$ をベッセル方程式に代入すると

$$\nu(\nu+2)x^{\nu-1}a_1 + \sum_{n=0}^{\infty}\left[\left((n+\nu+2)^2 - \nu^2\right)a_{n+2} - a_n\right]x^{n+\nu} = 0$$

となり、$a_1 = 0$ および漸化式 $\left((n+2+\nu)^2 - \nu^2\right)a_{n+2} = -a_n$ が得られます。これより、$a_{奇数} = 0$、および偶数 n に対し $a_n = -\dfrac{a_{n-2}}{n^2+2n\nu}$ を得ます。つまり $a_{2n} = -\dfrac{c_{2n-2}}{2^2 n(n+\nu)}$ となって、この漸化式から

$$
\begin{aligned}
a_{2n} &= \frac{-1}{2^2 n(n+\nu)} \times \frac{-1}{2^2(n-1)(n-1+\nu)} \times \cdots \\
&= \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n}\underline{n(n-1)\times\cdots\times 2\times 1}\times\underline{(n+\nu)\times(n+\nu-1)\times\cdots\times(\nu+2)\times(\nu+}}
\end{aligned}
$$

ここでガンマ関数を用いて波線部 $= n!$、下線部 $= \Gamma(\nu+n+1)!$ となります。これで $y_1(x)$ が得られますね。最後に $a_0 = 1/2^\nu\Gamma(\nu)$ とおくと[*10]

$$
J_\nu(x) \equiv y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2n}
$$

となり、これを**第一種ベッセル関数**と言います。ここでは ν は非整数なので、第二の解として $y_2(x) = J_{-\nu}(x)$ を得ます。

$\boxed{2}$ ひとつめの解は $\boxed{1}$ のときと同様に $J_\nu(x)$ となります。整数 ν に対し、$J_{-\nu}(x)$ は $J_\nu(x)$ と線形独立ではないので、もうひとつの解をフロベニウスの方法でひねり出しましょう。

決定式 $D(\lambda) = \lambda^2 - \nu^2$ を用いて、$x = 0$ のまわりの級数解の係数を求める式は次で与えられます。

$$
\begin{cases}
a_0 D(\lambda) = 0 \\
a_1 D(\lambda+1) = 0 \\
a_2 D(\lambda+2) + a_0 = 0 \\
a_3 D(\lambda+3) + a_1 = 0 \\
a_4 D(\lambda+4) + c_2 = 0 \\
\qquad\vdots
\end{cases}
$$

ここで $D(\lambda+1) \neq 0$ より $a_{奇数} = 0$ となります。$\lambda_1 = +\nu, \lambda_2 = -\nu$ として、$a_0 = D(\lambda+2\nu)$ とおきます。すると c_{2n} は

$$
c_{2n}(\lambda) = \frac{(-1)^n D(\lambda+2n)}{D(\lambda+2\nu)\times\cdots\times D(\lambda+4)D(\lambda+2)}
$$

となり、

$$
y(\lambda) = x^\lambda\left\{D(\lambda+2n) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n D(\lambda+2\nu)x^{2n}}{D(\lambda+2n)\times\cdots\times D(\lambda+4)D(\lambda+2)}\right\}
$$

[*10] こうすると規格化条件をみたす関数が得られます。

と書けます。そこで、$y_2(x) = \left.\dfrac{\partial y}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=-\nu}$ を求めます。

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial \lambda} =& \ln x \cdot x^{\lambda}\left\{D(\lambda+2\nu) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n D(\lambda+2\nu)x^{2n}}{D(\lambda+2n)\times\cdots\times D(\lambda+2)}\right\}\\ &+ x^{\lambda}\left\{D'(\lambda+2\nu) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{D(\lambda+2\nu)}{D(\lambda+2n)\times\cdots\times D(\lambda+2)}\right)(-1)^n x^{2n}\right\}\end{aligned}$$

となります。ここで $\lambda = -\nu$ として $y_2(x)$ を得ます。

$$\begin{aligned}y_2(x) =& \frac{-\nu}{2^{\nu-2}(\nu-1)!}\log x \cdot J_n(x) + x^{-\nu}\\ &\times\left\{2\nu + \sum_{n=1}^{\infty}\underline{\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{D(\lambda+2\nu)}{D(\lambda+2n)\times\cdots\times D(\lambda+2)}\right)\right]_{\lambda=-\nu}}(-1)^n x^{2n}\right\}\end{aligned}$$

ここで、波線部を b_n とおきます。b_n は対数微分 $f' = f\ln f$ から

$$\begin{aligned}b_n = \Bigg[&\frac{(\lambda+2\nu)^2-\nu^2}{\{(\lambda+2n)^2-\nu^2\}\times\cdots\times\{(\lambda+2)^2-\nu^2\}}\\ &\times\left\{\frac{2(\lambda+2\nu)}{(\lambda+2\nu)^2-\nu^2} - \sum_{j=1}^{n}\frac{2(\lambda+2j)}{(\lambda+2j)^2-\nu^2}\right\}\Bigg]_{\lambda=-\nu}\end{aligned}$$

となります。[*11] ■

ちなみに $\nu = 0$ の際は（脚注の $\gamma(m)$ を用いて）

$$y_2^{\nu=0}(x) = J_0(x)\log x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\gamma(n)}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}$$

となります。$\nu = 0$ の際は $y_1(x)$ は原点で発散せず、一方 $y_2(x)$ が原点で発散します。

---

*11 係数がいまいちはっきりしませんが、ひとつめの解 y_1 と比べて対数項が出ているのが大きな特徴です。これにより、y_1 と線形独立な解となるわけです。

ちなみに b_n は $n \le \nu - 1$ のとき

$$b_n = \frac{(-1)^n 2\nu}{2^{2n}(\nu-n)\times\cdots\times(\nu-1)n!}$$

および $n \ge \nu$ のとき

$$b_n = \frac{(-1)^{\nu}2\nu}{(\nu-1)!n!(n-\nu)!2^{2n}}(\gamma(n)+\gamma(n-\nu)-\gamma(\nu))$$

となります。ただし $\gamma(m) = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{m}$ です。これにより、最終的に $y_2(x)$ は次のように決まります。

$$\begin{aligned}y_2(x) =& \frac{2\nu}{2^{\nu}(\nu-1)!}\left\{-(\gamma(\nu)+2\log x)J_n(x) + \sum_{n=0}^{\nu-1}\frac{(\nu-n-1)!}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\nu}\right.\\ &\left.+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2n+\nu}}{(\nu+n)!n!}(\gamma(n)+\gamma(n+\nu))\right\}\end{aligned}$$

第 7 章

ベクトル解析 (微分)

ここでは一般性を排除し、3 変数の空間座標でのベクトル解析を論じます。ナブラを用いた演算が主役であり、様々公式を即席で導出できる便利なテンソル演算もここで取り上げます。

7.1 ベクトルと内積、外積

いくつか復習しておきましょう。

3 成分ベクトルの書き方

成分が (A_x, A_y, A_z) であるベクトル $\boldsymbol{A}$ は

$$\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z) \equiv A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$$

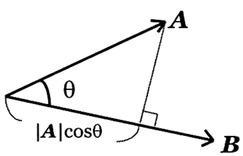
と書き表す。$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ を $\boldsymbol{A}$ の大きさと言う。

$\boldsymbol{i} = (1,0,0), \boldsymbol{j} = (0,1,0), \boldsymbol{k} = (0,0,1)$ でこれらを基本ベクトルと呼びます。断りが無い場合は全て直交座標 (xyz 座標) での物とします。$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ は $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ とも書きます。

内積について

定義 7.1 $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \equiv A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$ を内積と呼ぶ。

このとき $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ のなす角を θ とすると、余弦定理から $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$ が成り立ちます。[*1] 続いて**外積**を定めましょう。



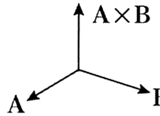
[*1] 他の次元でもこのように書ける θ はきちんと存在します。

外積について

定義 7.2 ベクトル $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$、$\boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z)$ について、外積 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ を次のように定める。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\ &= (A_yB_z - A_zB_y)\boldsymbol{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\boldsymbol{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ の大きさ $|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|$ は $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ のなす平行四辺形の面積と一致します。向きは $\boldsymbol{A}$ と垂直かつ $\boldsymbol{B}$ と垂直であり、$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ は順に「フレミングの左手」の中指、人差し指、親指に対応しています。いくつか例題を考えてみましょう。



例題 以下の各問に答えよ。

(1) $\boldsymbol{A} = (0, 2, 1)$、$\boldsymbol{B} = (1, 3, 0)$ において $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ を求めよ。

(2) (1) において $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{C}$ のなす角を求めよ。

解答

(1) 公式どおりに、

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}\boldsymbol{i} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\boldsymbol{k} = -3\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k} = \underline{(-3, 1, -2)}$$

(2) $\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}}{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{C}|}$ を使えばよいでしょう。$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C} = 0\cdot(-3) + 2\cdot 1 + 1\cdot(-2) = 0$ により、
$\cos\theta = 0$ となり、$\theta = 90^\circ$ を得ます。

7.2 ナブラ (∇) の導入

座標ベクトル $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ および、**ナブラ**と呼ばれる次式の (形式的な) ベクトルを導入します。

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$f(x, y, z)$ が x, y, z の関数 (スカラー関数) であり、$f(\boldsymbol{r})$ と書けるとします。また、ベクトル $\boldsymbol{A}$ が、$\boldsymbol{A} = (A_x(\boldsymbol{r}), A_y(\boldsymbol{r}), A_z(\boldsymbol{r}))$ のように関数 (ベクトル関数) の形で書かれているとします。ベクトルには、前節に見るように「スカラー倍」の他に「内積」「外積」の演算が許されるので、ナブラを含んだ演算も、やはり次のように 3 通り考

えられます。

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x(\boldsymbol{r})}{\partial x} + \frac{\partial A_y(\boldsymbol{r})}{\partial y} + \frac{\partial A_z(\boldsymbol{r})}{\partial z}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

ここで ∇ が演算子であることに注意しましょう。例えば $\frac{d}{dx}g(x)$ と $g(x)\frac{d}{dx}$ が全く違うものであるように、∇f と $f\nabla$ は全くの別モノです。(つまり、上の 3 つと $f\nabla$、$\boldsymbol{A}\cdot\nabla$、$\boldsymbol{A}\times\nabla$ を一緒にしてはいけないということ)

7.3 勾配 (grad)

勾配の定義

定義 7.3 演算子 grad$=\nabla$ を次のように定義する。

$$\mathrm{grad} f = \nabla f \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

これを $f(x,y,z)$ の**勾配**と呼ぶ。

x の関数 $g(x)$ について、$\frac{d}{dx}g(x)$ が $g(x)$ の傾きを表すように、「勾配 (grad)」は 3 変数関数 $f(x,y,z)$ の傾き具合をベクトルで表したものと解釈することができます。特に点 $\boldsymbol{a}$ を指定したときのベクトル $\nabla f(\boldsymbol{a})$ が $\boldsymbol{a}$ における f の勾配であるといえるでしょう。さらに、このベクトル $\nabla f(\boldsymbol{a})$ と $\boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|$ の内積を取ったものを f の**方向微分係数**と呼びます。(この説明はすぐ後にまわします)

例題 $f(x,y,z) = x + y^2 + \sin z$ とするとき、grad$f$ を求めよ。

解答 定義にしたがって計算すると、

$$\mathrm{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (1, 2y, \cos z)$$

を得ます。■

例題 $f(x,y,z) = x + y^2 + \sin z$ について、$\boldsymbol{a} = (1,1,0)$ における勾配を求めよ。

解答 grad$f = (1, 2y, \cos z)$ に $(x,y,z) = (1,1,0)$ を代入して $(1,2,1)$ を得ます。■

$f(\boldsymbol{r})$ に対して単位定ベクトル $\boldsymbol{n} = (n_x, n_y, n_z)$ が与えられたとき、微分係数 $\frac{\partial f}{\partial n}$ を次のように定義します。

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{r})}{\partial n} \equiv \lim_{h\to 0} \frac{f(\boldsymbol{r}+h\boldsymbol{n}) - f(\boldsymbol{r})}{h}$$

すると $\dfrac{\partial f}{\partial n}$ は $\boldsymbol{n}$ に沿った f の変化率であると見ることができ、これを**方向微分係数**と呼びます。これが ($\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|$ として) $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\cdot(\nabla f)$ に等しくなることを示しましょう。多変数 (3 変数) のテイラー展開を利用して、$f(x+hn_x, y+hn_y, z+hn_z)$ は

$$
\begin{aligned}
f(x+hn_x, y+hn_y, z+hn_z) &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(ha_x\frac{\partial}{\partial x} + hn_y\frac{\partial}{\partial y} + hn_z\frac{\partial}{\partial z}\right)^k f(x,y,z) \\
&= f + hn_x\frac{\partial f}{\partial x} + hn_y\frac{\partial f}{\partial y} + hn_z\frac{\partial f}{\partial z} + \sum_{k=2}^{\infty}(h\boldsymbol{a}\cdot\nabla)^k f \\
&= f(\boldsymbol{r}) + h(\boldsymbol{n}\cdot\nabla f) + h^2F(\boldsymbol{r})
\end{aligned}
$$

と書き換えることができます。最後に使った $h^2F(\boldsymbol{r})$ は最後の項をまとめたもので、$h^2F(\boldsymbol{r}) = \sum_{k=2}^{\infty}(h\boldsymbol{n}\cdot\nabla)^k f(\boldsymbol{r})$ です。これにより、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial n} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(\boldsymbol{r}+h\boldsymbol{n}) - f(\boldsymbol{r})}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\Big((\boldsymbol{n}\cdot\nabla f) + hF(\boldsymbol{r})\Big) \\
&= \boldsymbol{n}\cdot\nabla f
\end{aligned}
$$

を得ます。

例題　$f(x,y,z) = x + y^2 + \sin z$ に対し $\boldsymbol{a} = (1,1,0)$ における方向微分係数を求めよ。

解答　$\boldsymbol{a}$ を単位ベクトルにします。

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0)$$

すでに勾配は $\nabla f = (1,2,1)$ として求めているので、方向微分係数は

$$\nabla f\cdot\boldsymbol{n} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

となります。■

ちなみに、grad= ∇ の演算について、以下が成立します。(ϕ, ψ は任意関数)

$$
\begin{aligned}
\nabla(\phi+\psi) &= \nabla\phi + \nabla\psi \\
\nabla(\phi\psi) &= \psi\nabla\phi + \phi\nabla\psi
\end{aligned}
$$

7.4 発散 (div)

発散の定義

定義 7.4 演算子 div= ∇· を次のように定義する。

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A} \equiv \frac{\partial A_x(\boldsymbol{r})}{\partial x} + \frac{\partial A_y(\boldsymbol{r})}{\partial y} + \frac{\partial A_z(\boldsymbol{r})}{\partial z}$$

これを $\boldsymbol{A}$ の**発散**と呼ぶ。

この定義式からアイディアを膨らますのではなく、次のような物理的要請で div が必要になることを見ましょう。

質量保存の法則を考えます。ある地点 A から B まで流れる (移動する) 密度 ρ で体積 $dV = dxdydz$(微小体積) の物体について、

(−1) × (単位時間に A から流れ出た質量) = (B に流れ出てくる質量)

という主張から、$\boldsymbol{v}$ を物体の流速 ($\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}$) として、

$$-\frac{\partial}{\partial t}\rho dV = \rho \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S}$$

という式を得ます。[*2] この方程式を噛み砕いてさらにきれいにするためには、dV や $d\boldsymbol{S}$ が邪魔になります。ここで微小面積 $d\boldsymbol{S} = (dydz, dzdx, dxdy)$ を使って、次のように工夫します。

$$\begin{aligned}
\rho \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S} &= \rho v_x dydz + \rho v_y dzdx + \rho v_z dxdy \qquad (7.1)\\
&= \frac{\partial}{\partial x}\rho v_x dxdydz + \frac{\partial}{\partial y}\rho v_y dydzdx + \frac{\partial}{\partial z}\rho v_z dzdxdy\\
&= \frac{\partial}{\partial x}\rho v_x dV + \frac{\partial}{\partial y}\rho v_y dV + \frac{\partial}{\partial z}\rho v_z dV\\
&= \nabla \cdot \boldsymbol{v}\rho dV \qquad (7.2)
\end{aligned}$$

最後の行で div を導入していることがわかるでしょうか？　これにより、質量保存則は

$$-\frac{\partial}{\partial t}\rho dV = \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) dV$$

と書くことができ、次の方程式を得ることができます。

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0$$

---

*2 一次元で考えて見ましょう。断面積 S の長方形の中を速度 v で移動する箱について、通過時間を Δt として箱の体積 $|\Delta V|$ は $v\Delta t S$ として得られます。ΔV が損失を表しているので符号に気をつけて、

$$-\frac{\Delta V}{\Delta t} = vS$$

とし、三次元に拡張すれば質量保存則が得られます。

この方程式は一般に**連続の式**と呼ばれます。今回の導出は流体力学に拠りましたが、電磁気学や量子力学でもこの形の方程式 (保存則) が現れ、連続の式は物理的に**保存法則**を表し、「物体が突然何もないところから現れたり、逆に消えたりすることはない」という主張を示しています。

また、任意のベクトル場 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ およびスカラー場 ϕ について、次が成り立ちます。

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \nabla \cdot \boldsymbol{A} + \nabla \cdot \boldsymbol{B}$$
$$\nabla \cdot (\phi \boldsymbol{A}) = (\nabla \phi) \cdot \boldsymbol{A} + \phi \nabla \cdot \boldsymbol{A}$$

div と grad の形式的な積を使って、次の演算子を定義します。

ラプラシアンの定義

定義 7.5 演算子ラプラシアン $\triangle$ を次で定義する。

$$\triangle = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

特にラプラス方程式

$$\triangle f(x, y, z) = 0$$

を満たす $f(x, y, z)$ を**調和関数**と呼びます。

7.5 回転 (rot,curl)

回転の定義

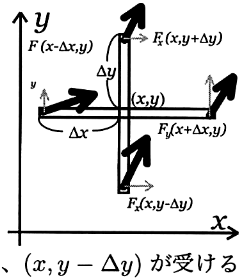
定義 7.6 演算子 rot$= \nabla \times$ を次のように定義する。

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A} \equiv \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

これを $\boldsymbol{A}$ の**回転**と呼ぶ。

これは力学を例にとって考えます。

図のように横長 $2\Delta x$、縦長 $2\Delta y$ の長方形を重ねて作った風車を風 (速度場) の中において考えてみましょう。風車の中心 (x, y) は動かないとします。黒太矢印で表された風の速度ベクトルにより、風車のそれぞれの場所が力 $\boldsymbol{F}$ を受け、$\boldsymbol{F}$ を座標に依存するベクトルと考えます。



風車の各地点 $(x - \Delta x, y)$、$(x, y + \Delta y)$、$(x + \Delta x, y)$、$(x, y - \Delta y)$ が受ける力の成分を灰色の矢印で示しました。灰色矢印は風車を回す力を表しており、それぞれの

地点において受ける力を総合すると、時計回りに風車を回す力のモーメント N は

$$
\begin{aligned}
N &= F_y(x-\Delta x, y)\Delta x + F_x(x, y+\Delta y)\Delta y - F_y(x+\Delta x, y)\Delta x - F_x(x, y-\Delta y)\Delta y \\
&= \frac{F_y(x+\Delta x, y) - F_y(x-\Delta x, y)}{\Delta x}\Delta x\Delta y - \frac{F_x(x, y+\Delta y) - F_x(x, y-\Delta y)}{\Delta y}\Delta x\Delta y \\
&\simeq 2\left(\frac{\partial F_y}{\partial y} - \frac{\partial F_x}{\partial x}\right)\Delta x\Delta y
\end{aligned}
$$

と書けます。[*3] これは 2 次元の結果なので得られるのはスカラーですが、3 次元に拡張すると、$\mathrm{rot}\boldsymbol{F}$ が得られます。[*4] また、任意の $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ および ϕ について、次が成り立ちます。

$$
\begin{aligned}
\nabla \times (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) &= \nabla \times \boldsymbol{A} + \nabla \times \boldsymbol{B} \\
\nabla \times (\phi \boldsymbol{A}) &= (\nabla\phi) \times \boldsymbol{A} + \phi(\nabla \times \boldsymbol{A})
\end{aligned}
$$

次についてそれぞれ求めよ。ただし $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ とし、$\boldsymbol{\omega}$ を定ベクトルとする。
(1)∇r^n (2)$\nabla \cdot (r^n \boldsymbol{r})$ (3)$\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$

(1) $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ を使い、x 座標成分 $[\nabla r^n]_x$ のみ考えてみると、

$$
[\nabla r^n]_x = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}} = \frac{n}{2}(2x)(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-1} = nxr^{n-2}
$$

が得られ、他の成分も同様に考えると $\underline{nr^{n-2}\boldsymbol{r}}$ が得られます。

(2) x で偏微分した結果を使います。

$$
\frac{\partial}{\partial x}x(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}} = r^n + x\frac{n}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-1}(2x) = r^n + nx^2r^{n-2}
$$

これを各成分で足し合わせて $3r^n + nr^{n-2}(x^2+y^2+z^2) = \underline{(n+3)r^n}$ が得られます。

(3) $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ として、$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = (\omega_y z - \omega_z y, \omega_z x - \omega_x z, \omega_x y - \omega_y x)$ であるから、

$$
[\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})]_x = \frac{\partial}{\partial y}(\omega_x y - \omega_y x) - \frac{\partial}{\partial z}(\omega_z x - \omega_x z) = 2\omega_x
$$

となり、他の成分も同様に考えると $\underline{2\boldsymbol{\omega}}$ を得ることができます。

7.6 公式集

これまでに扱った項目について、いくつかの公式をおいておきます。

[*3] 厳密に言うとこのようにはならず、各点での力を積分してやる必要があります。今回は積分を取ることと Δx(または Δy) を掛けた結果が等しくなることを前提にしています。

[*4] 設定上、式の頭につく 2 が邪魔ですが

ベクトル解析の様々な公式

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\begin{vmatrix}A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\\ C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix}$$
$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$$

$$\nabla\times\nabla\phi=0$$
$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0$$
$$\nabla\cdot\nabla\phi=\triangle\boldsymbol{A}$$

$$\begin{aligned}
\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) &= \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}\\
\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{A}) &= \phi\nabla\cdot\boldsymbol{A}+(\nabla\phi)\cdot\boldsymbol{A}\\
\nabla\times(\phi\boldsymbol{A}) &= \phi\nabla\times\boldsymbol{A}+(\nabla\phi)\cdot\boldsymbol{A}\\
\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) &= \boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})\\
\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) &= (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B})-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\\
\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) &= (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})
\end{aligned}$$

例題　ベクトル場 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ が渦無し（$\nabla\times\boldsymbol{u}=0,\nabla\times\boldsymbol{v}=0$）であれば、$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ は湧き出し無しであることを示せ。また、ベクトル $\boldsymbol{A}$ が渦無しのとき、$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{r}$ は湧き出し無しであることを示せ。

解答　上の公式より

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{u})-\boldsymbol{u}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{v})=0$$

が得られます。また、$\nabla\times\boldsymbol{A}=0$ のとき、先と同じ公式に対して $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{A}$ とし、$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{r}$ とおくことで

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{r})=\boldsymbol{r}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{r})=-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{r})$$

となり、$\nabla\times\boldsymbol{r}=0$ から所望の結果が得られます。■

7.7　ポテンシャル論

ポテンシャルは物理で言う位置エネルギーを表す関数です。

ポテンシャル

定義 7.7 ベクトル場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}),\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ が

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\phi$$
$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$$

をみたすとき、$\phi(\boldsymbol{r})$ を**スカラーポテンシャル**と呼び、$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ を**ベクトルポテンシャル**と呼ぶ。またこのように書ける $\boldsymbol{E}$ を**層状ベクトル**、$\boldsymbol{B}$ を**管状ベクトル**と呼ぶ。

ここで重要な次の命題を紹介しておきます。

Helmholtz(ヘルムホルツ)の定理（ベクトル解析の基本定理）

定理 7.1 無限遠で 0 に収束する任意のベクトル場 $\boldsymbol{X}$ は層状ベクトル場と管状ベクトル場の和で書ける。

$$\boldsymbol{X} = -\nabla\phi + \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{7.3}$$

$\nabla \cdot \nabla\times = 0, \nabla \times \nabla = 0$ を利用して示します。[*5]式 (7.3) で両辺に左から $\nabla\cdot$ すると

$$\Delta\phi = -\nabla \cdot \boldsymbol{X}$$

となります。$\boldsymbol{X}$ はすでに与えられているので $\rho = \nabla \cdot \boldsymbol{X}$ とおくことでポアソン方程式 $\Delta\phi = -\rho$ が得られます。任意の $\rho(\boldsymbol{r})$ に対しポアソン方程式の解が存在することから、

$$\Delta\phi = -\nabla \cdot \boldsymbol{X} \Rightarrow \nabla \cdot (\nabla\phi + \boldsymbol{X}) = 0$$

となり、$\nabla\phi + \boldsymbol{X} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ となる $\boldsymbol{A}$ が存在することになり、命題が示せます。□

7.8 テンソルを用いたベクトル解析*

テンソル[*6] を用いると前小節の公式が比較的簡単に確かめられます。[*7] テンソル表記には**縮約（総和規約）**というルール[*8] が付きまといます。ここでも縮約を利用してガンガン計算していきます。また、変数の各成分をインデックスで表し、ベクトル $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ を $x_i = (x_1, x_2, x_3)$ と書きます。例えば、$\boldsymbol{x}^2$ をテンソル表記で書くと $x_i x_i$ となります（i は 1 から 3 まで）。次にレヴィ・チビタの記号[*9] ε_{ijk} を用意しておきます。

レヴィ・チビタのイプシロン

定義 7.8 レヴィ・チビタの記号は次のように定義される。

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (ijk) = (123), (231), (312) \text{ のどれか（cyclic）} \\ -1 & (ijk) = (132), (213), (321) \text{ のどれか (anti-cyclic)} \\ 0 & \text{otherwise（その他）} \end{cases} \tag{7.4}$$

これによるとベクトルの外積は次のように表されます。[*10]

$$[\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}]_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k \tag{7.5}$$

左辺の $[\ ]_i$ はカッコ内のベクトルの i 成分を表します。

[*5] ここでの証明は千葉 [15]p87 に依っています。

[*6] 一言でテンソルといってもいろいろ種類があり、ここではベクトルをテンソル化したものを扱います。テンソルは扱う文脈（舞台）によって使い方が変わるので注意しましょう。

[*7] もっとも直截的なのはストレートに成分計算することですが……。

[*8] 和を取るのに $\sum$ を省略するという暗黙の了解。

[*9] 別名エディントンのイプシロン。

[*10] 略証として。$i = 1$ のときは、$[\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}]_1 = A_2 B_3 - B_2 A_3$ となり、$i = 2, 3$ で計算すると、確かに外積を表していることがわかります。

これらの約束によりベクトルの計算が楽になります。

例題 定ベクトル A に対して $\nabla \times \boldsymbol{A}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = i\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{A}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ を示せ。($\vec{k}$ は $\boldsymbol{k}$ と同じ)

解答 レヴィ・チビタの記号を用いて次のように書けることがわかります。ただし $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ を ∂_i と書き、$\partial_j e^{i(k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3)} = ik_j e^{i(k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3)}$ となることを用います。

$$[\nabla \times \boldsymbol{A}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}]_i = \partial_j A_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = ik_j A_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = i[\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{A}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}]_i = \epsilon_{ijk} ik_j A_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

となり、答えを得ます。■

レヴィ・チビタのイプシロンの性質

定理 7.2 次が成り立つ。

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

ここで δ_{ij} はクロネッカのデルタ[*11] です。個々のケースで場合分けすれば証明は簡単です。[*12]

例題 $\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$ を示せ。

解答 $\varepsilon_{klm} = \varepsilon_{lmk}$ に注意して[*13] $D_k = [\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}]_k$ とおくことで、$D_k = \varepsilon_{klm} B_l C_m = \varepsilon_{lmk} B_l C_m$ と書けます。これにより

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})]_i &= \varepsilon_{ijk} A_j D_k \\
&= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} A_j B_l C_m \\
&= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) A_j B_l C_m \quad (\because \text{定理 } 7.2) \\
&= \left(A_m B_i C_m - A_j B_j C_i \right) \\
&= \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}[\boldsymbol{B}]_i - \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}[\boldsymbol{C}]_i
\end{aligned}$$

となり、証明が終わります。■

このようにテンソル演算と総和規約の組み合わせは、ベクトルの内積や外積をシンプルに書き直すことができるため、ベクトル解析の公式が簡単に証明できたり、作れたりします。大事なのはたくさんの公式を覚えることではなく、具体的に問題を解く

---

*11 $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$

*12 以下では mod3 として、$\begin{pmatrix} i \equiv k+1, j \equiv k+2 \\ l \equiv k+1, m \equiv k+2 \end{pmatrix}$ のとき、$\begin{pmatrix} i \equiv k+1, j \equiv k+2 \\ l \equiv k+2, m \equiv k+1 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} i \equiv k+2, j \equiv k+1 \\ l \equiv k+1, m \equiv k+2 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} i \equiv k+2, j \equiv k+1 \\ l \equiv k+2, m \equiv k+1 \end{pmatrix}$、その他のとき、の5つに分類して計算すれば証明できます。

*13 $\varepsilon_{312} = \varepsilon_{123}$ と一緒!!

際に現れるベクトル解析の式を、レヴィ・チビタの記号と縮約を使ってうまく解きほぐせるようになることです。

7.9 演習問題

1 次の式がそれぞれ成り立つことを示せ。すべてのベクトルは3成分とする。

(1) $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})^2+(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2$

(2) $\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$

2 次の式がそれぞれ成り立つことを示せ。すべてのベクトルは3成分とする。

(1) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijl}=2\delta_{kl}$

(2) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk}=6$

3 $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})-k^2\boldsymbol{A}=0$ の任意の解は、自動的にヘルムホルツ方程式 $\nabla^2\boldsymbol{A}+k^2\boldsymbol{A}=0$ および湧き出しなしの方程式 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$ を同時にみたすことを示せ。

解答

1 イプシロンを積極的に使ってやりましょう。

(1) $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})^2=\sum_{i=1}^{3}[\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}]_i\cdot[\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}]_i=(\varepsilon_{ijk}A_jB_k)(\varepsilon_{ilm}A_lB_m)=\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}A_jB_kA_lB_m$ となり、$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk}=\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}$ を用いると

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})^2&=\bigl(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}\bigr)A_jB_kA_lB_m=A_lB_mA_lB_m-A_mB_lA_lB_m\\&=A_lA_lB_mB_m-(A_lB_l)(A_mB_m)=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^2\end{aligned}$$

となり、所望の式を得ます。

(2) (1) 同様にイプシロンを使って外積を表します。積の微分に注意して、

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})&=\partial_i\varepsilon_{ijk}A_jB_k=\varepsilon_{ijk}(\partial_iA_jB_k)\\&=\varepsilon_{ijk}\Bigl(B_k(\partial_iA_j)-A_j(\partial_iB_k)\Bigr)\\&=B_k(\varepsilon_{ijk}\partial_iA_j)-A_j(\varepsilon_{ijk}\partial_iB_k)=\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})\end{aligned}$$

となって所望の式を得ます。■

2 (1) 縮約に注意。ここでは総和規約を使わず和の記号 $\sum$ を用います。

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijl}&=\sum_{ij}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijl}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\bigl(\delta_{jj}\delta_{kl}-\delta_{jl}\delta_{kj}\bigr)\\&=(\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33})\delta_{kl}-(\delta_{1l}\delta_{k1}+\delta_{2l}\delta_{k2}+\delta_{3l}\delta_{k3})\\&=3\times\delta_{kl}-\delta_{kl}=2\delta_{kl}\end{aligned}$$

を得ます。

(2) (1) の結果に対して $l=k$ として、さらに和を取ります。

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 2\sum_{k=1}^{3}\delta_{kk} = 2\times(\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33}) = 2\times 3 = 6$$

を得ます。

3 与式両辺に左から $\nabla\cdot$ を掛けると、$\nabla\cdot\nabla\times = 0$ に注意して $\nabla\cdot\boldsymbol{A} = 0$ が得られます。一方、与式についてベクトル解析の公式

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A}$$

を用いると

$$\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) = \nabla^2\boldsymbol{A} + k^2\boldsymbol{A}$$

となり、$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = 0$ を用いると $\nabla^2\boldsymbol{A} + k^2\boldsymbol{A} = 0$ となり、求めるべき結果が得られます。■

第 8 章

ベクトル解析 (積分)

多変数積分を計算しましょう。と言ってもただの重積分ではなく、ここでは特に 3 次元空間において（曲線や曲面の一般論には立ち寄らずに）「曲線に沿った積分」「曲面に沿った積分」を考え、色々面白い結果（ガウスの発散定理やストークスの定理）が発掘されて行くことを見て行きます。

8.1 線積分

8.1.1 具体的に求積するために

ここまで (リーマン) 積分の区間が x 軸上の 2 点によって決まるものを扱ってきました。[*1] これを拡張して、ある曲線 C の上を経路にとって、C 上の区間で積分する、いわゆる**線積分**の概念を本項で扱います。線積分は $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ に対し

$$\int_C f(x,y,z)ds = \int_C f(x,y,z)\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|dt \tag{8.1}$$

または

$$\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_C \{\, A_x dx + A_y dy + A_z dz \,\} \tag{8.2}$$

という形で書かれます。[*2] 上の式をスカラー場の線積分、下の式をベクトル場の線積分といいます。特にベクトル場の線積分は、力 $\boldsymbol{F}$ のなす仕事が $\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ の形で書かれることと照らし合わせればイメージが湧きやすいのではないでしょうか。

とにかく、こういった線積分を考えるためには、次のようにする必要があります。

方法 1 あるパラメータ t を使って、$x = x(t), y = y(t), z = (t)$ のように表し、置換積分の要領で $dx = \dfrac{dx}{dt}dt, dy = \dfrac{dy}{dt}dt, dz = \dfrac{dz}{dt}dt$ という形に書き直し、

$$\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_C \left(A_x\frac{dx}{dt}dt + A_y\frac{dy}{dt}dt + A_z\frac{dz}{dt}dt\right) = \int_{t=a}^{b}\left(A_x\frac{dx}{dt} + A_y\frac{dy}{dt} + A_z\frac{dz}{dt}\right)$$

としてこれまで扱ってきた積分 (あるいはスカラー場の線積分) に帰着させる。

[*1] あるいはこれの複数変数バージョン。

[*2] これは 3 変数の場合。もっと変数を多くしても同様に書けます。

例題　原点 O と点 A(8, 12, 4) を通る線分を、O から A に向かって移動する経路 C について、次の線積分を求めよ。

$$\int_C (xdx + zdy + y^2dz)$$

解答　$(x, y, z) = (2t, 3t, t)$　$(t|0 \to 4)$ とおけば変数を変換できるので (O から A の向きに注意！)、$(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}) = (2, 3, 1) \Rightarrow (dx, dy, dz) = (2dt, 3dt, dt)$ を用いて次を得ます。

$$\begin{aligned}\int_C (xdx + zdy + y^2dz) &= \int_0^4 \left((2t)(2dt) + t(3dt) + (9t^2)dt\right) \\ &= \int_0^4 (4t + 3t + 9t^2)dt \\ &= \int_0^4 (9t^2 + 7t)dt \\ &= \left[3t^3 + \frac{7}{2}t^2\right]_0^4 \\ &= 192 + 56 = 248 \quad \blacksquare\end{aligned}$$

方法 2　特に変数が 2 つのとき、

$$\int_C (A_x dx + A_y dy)$$

を考えるために、経路 C を $y = f(x)$ の形に書き、

$$\int_C (A_x dx + A_y dy) = \int_C (A'_x dx + A'_y \tfrac{df}{dx}(x)dx)$$

の形にして従来の積分に帰結させる。(A' は A を x の関数に書き改めたもの)

例題　次の線積分を求めよ。

$$\int_C \cos(\pi\sqrt{y})dx - \sin(\pi x)dy$$

ただし C は $y = x^2$ 上を、(0, 0) から (2, 4) まで動く経路とする。

解答　$\dfrac{dy}{dx} = 2x$ であるから、

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int_C \cos(\pi|x|)dx - \sin(\pi x)2dx \\ &= \int_0^2 [\cos(\pi x) - 2\sin(\pi x)]dx \\ &= \Big[\sin(\pi x) + 2\cos(\pi x)\Big]_0^2 = 0\end{aligned}$$

を得ます。■

8.1.2　向き付けと閉積分

向き付けられた経路 C に対して、逆向きにしたものを $-C$ と書くことにします。すると、

$$\int_C = -\int_{-C}$$

という性質が成り立つことがわかります。これは 1 変数積分で $\int_a^b = -\int_b^a$ が成立することとまったく同じです。また、経路 C が単一の閉曲線なら、特別に

$$\int_C = \oint_C$$

と書くことにします。これを**閉積分**、あるいは**周回積分**と呼びます。

8.1.3　グリーンの定理

線積分を重積分に書き換えるグリーンの定理を扱います。

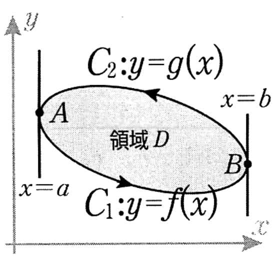
Green（グリーン）の定理

定理 8.1 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ が C(反時計回り) を境界とする閉領域 D について、

$$\int_C \{ P(x,y)dx + Q(x,y)dy \} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

が成立する。

簡単なケースで証明してみましょう。図のように C を $x = a$ の点 A と $x = b$ の点 B にわけ、ここで A から B にいたる $C_1 : y = f(x)$ と、B から A にいたる $C_2 : y = g(x)$ に分解します。すると、



$$\begin{aligned}
\int_C P(x,y)dx &= \int_{C_1} P(x,y)dx + \int_{C_2} P(x,y)dx \\
&= \int_a^b P(x,f(x))dx - \int_b^a P(x,g(x))dx \\
&= \int_a^b \{ P(x,f) - P(x,g) \} dx \\
&= -\int_a^b dx \int_f^g \frac{\partial P}{\partial y} dy = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy.
\end{aligned}$$

となり、同様にして $\int_C Qdy$ を考え、両辺を足してやればグリーンの定理を得ることができます。□

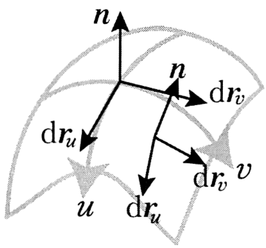
8.2　曲面と面積分

線積分同様に面積分を定義しましょう。$d\boldsymbol{S} = (dS_x, dS_y, dS_z) = (dydz, dzdx, dxdy)$ とし、ベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = (A_x, A_y, A_z)$ に対して次の積分を考えます。

$$\iint \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = \int A_x dydz + \iint A_y dzdx + \iint A_z dxdy$$

これはちょうど二重積分 $\iint dxdyf(x, y)$ の拡張になっていますね。

ところで、図のように xyz 軸の取り方にこだわらず、与えられた曲面 S に即して張った座標系に対し、同様の積分が計算できた方が断然便利ですよね。そこで、あらためて $f(\boldsymbol{r}) = 0$ で与えられた曲面 S に対し面積分 $\iint_S \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}$ を定めましょう。ここで $d\boldsymbol{S}$ は「曲面の微小面積であり、曲面と直交するベクトル」とします。曲面に垂直な単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を用意すれば $d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}dS$ と書けることになるでしょう。



$f(x, y, z) = 0$ で固定された曲面を表すベクトル表示 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ は、実質 2 つの変数 u, v で書くことができ、図のように (局所的に灰色の)uv 座標を貼り付けることにします。このとき、ふたつのベクトル $d\boldsymbol{r}_u = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}du,\ d\boldsymbol{r}_v = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}dv$ は図のように曲面と直交するベクトルとなり、曲面の微小面積 $d\boldsymbol{S}$ は、接平面の微小面積に一致し、

$$d\boldsymbol{S} = d\boldsymbol{r}_u \times d\boldsymbol{r}_v$$

のように書け、次の通りとなります。

面積分のヤコビアン

定理 8.2 曲面 S 上の $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ を u, v の組みで表すとき、$d\boldsymbol{S}$ は次で与えられる。

$$d\boldsymbol{S} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} dudv$$

しかし、$\boldsymbol{r}_u,\ \boldsymbol{r}_v,\ d\boldsymbol{S}$ が必ずしも右手系をなす必要はない（ように見える）ので、

$$d\boldsymbol{S} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} dudv = -\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} dudv$$

と考えても差し支えない？　という問題が発生し、きちんと向き付けのヤコビアンを用意する必要があります。これについては次章で微分形式を導入して議論していきます。

例題　半径 a の球面 S に対し、次の面積分を計算せよ。

$$\iint_S (x^2 + y^2) dS$$

解答 極座標 $\boldsymbol{r} = (a\sin\theta\cos\varphi, a\sin\theta\cos\varphi, a\cos\theta)$ を用意し、$u \to \theta, v \to \varphi$ とすると $\boldsymbol{n} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \cos\theta)$ に対し $dS = |d\boldsymbol{S}| = |\boldsymbol{n}|a^2\sin\theta d\theta d\varphi$ と書けることから、

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi a^2 (a^2 \sin^2\theta) \\
&= 2\pi a^4 \int_0^\pi d\theta \sin^3\theta \\
&= 2\pi a^4 \frac{4}{3} = \frac{8\pi}{3} a^4
\end{aligned}
$$

となります。ただし最後に

$$
\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = \int_0^\pi (1-\cos^2\theta)\sin\theta d\theta = \frac{4}{3}
$$

となることを用いました。■ ちなみにこれはそのまま球殻の慣性モーメントの計算になっています。

8.3 積分定理

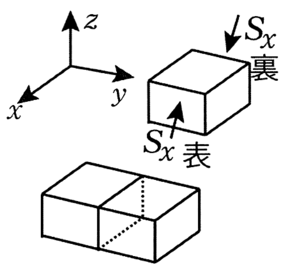
体積積分を面積分に書き換えたり、その逆を使うケースは具体計算でよく現れます。厳密ではありませんが、それぞれ簡潔に示していきましょう。

ガウスの積分定理

定理 8.3 ある閉曲面 S に囲まれた領域 V 内での、任意のスカラー関数 $\phi(x, y, z)$ について、次の関係が成立する。

$$
\iiint_V \nabla\phi dV = \iint_S \phi d\boldsymbol{S}
$$

まず右図のような微小立体 v で証明します。ϕ を x で偏微分し、領域 v で積分すると、v の表面 S に対して



$$
\begin{aligned}
\int_v \frac{\partial\phi}{\partial x} dV &= \int_v \frac{\partial\phi}{\partial x} dxdydz \\
&= \int_{S_x\text{表}} \phi dydz - \int_{S_x\text{裏}} \phi dydz \\
&= \int_S \phi dS_x
\end{aligned}
$$

さらに微小立体を張り合わせて任意の立体 V を作り、同様に重積分すると図のように重なりあった面の積分は打ち消され、

$$
\int_V \frac{\partial\phi}{\partial x} dV = \int_V \frac{\partial\phi}{\partial x} dxdydz = \int_S \phi dS_x
$$

のように書けます。これを同様に y, z 成分で考えてまとめると、ガウスの積分定理が得られます。□

例題 アルキメデスの原理 (; 密度 ρ の流体中に沈めた物体には、物体が押しのけた体積 V だけの流体の重力に等しい上向きの力が働く。この力を浮力といい $\rho V g$ で表される) を証明せよ。

解答 各点での圧力を $p = p_0 + \rho g z$ とします。ただし z 軸は重力方向です。これに対してガウスの積分定理から (圧力)·(面積) の和が

$$-\iint_S p d\boldsymbol{S} = -\iiint_V \nabla p dV = -\iiint_V \nabla(p_0 + \rho g z) dV = (0, 0, -\rho V g)$$

が得られます。ただし $\iiint_V dV = V$ としています。■

ガウスの発散定理

定理 8.4 閉曲面 S 内の領域 V と任意のベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ について、次の関係が成立する。

$$\iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{A} dV = \iint_S \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}$$

ガウスの積分定理の導出過程において、$\phi = A_x$ とおけば

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x} A_x dV = \int_S A_x dS_x$$

と書け、同様に $\phi = A_y, A_z$ とおいて足し合わせると、$\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$ についてガウスの発散定理が成立することがわかります。

例題 xyz 空間内に置かれた表面 S で覆われた体積 V の立体がある。どんな形に対しても[*3] $\iint_S \boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{S}$ は一定の値になることを示せ。

解答 ガウスの発散定理より

$$\iint_S \boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{r} dV = 3 \iiint_V dV = 3V$$

となります。■

例題 ガウスの法則

$$\iint_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{q}{\varepsilon} \quad ただし\ q = \iiint_V \rho dV$$

がわかっているものとして、マクスウェルの方程式 (微分系) のひとつ

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

が成立することを示せ。

解答 与式およびガウスの発散定理より

$$\iint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon}dV\ ,\quad \iint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{E}dV$$

となるので、比較して所望の式が得られます。*4 ■

Stokes(ストークス)の定理

定理 8.5 閉曲線 C 内の領域 S と任意のベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ について、次の関係が成立する。ただし C と $d\boldsymbol{S}$ は右ねじの法則の関係にあるとする。

$$\iint_S (\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot d\boldsymbol{S} = \oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}$$

グリーンの定理の拡張版なので、式 (11.9) に気をつけ、同様に示してみましょう。グリーンの定理の証明に使った図を用いて $x=a, x=b$ で曲線を $C_1: (x, y_1(x), z_2(x)), C_2(x, y_2(x), z_2(x))$ として、

$$\begin{aligned}
\oint_C A_x dx &= \oint_C A_x(x, y(x), z(x)) \\
&= \int_{C_1} A_x(x, y_1(x), z_1(x))dx + \int_{C_2} A_x(x, y_2(x), z_2(x))dx \\
&= \int_a^b A_x(x, y_1, z_1)dx + \int_b^a A_x(x, y_2, z_2)dx \\
&= -\int_a^b \{\, A_x(x, y_2, z_2) - A_x(x, y_1, z_1) + A_x(x, y_2, z_1) - A_x(x, y_2, z_1)\,\}\, dx \\
&= -\int_a^b dx \int_{z_1}^{z_2} dz\frac{\partial A_x}{\partial z} - \int_a^b dx\int_{y_1}^{y_2} dy\frac{\partial A_x}{\partial y} \\
&= \int_S \frac{\partial A_x}{\partial z}dzdx - \int_S \frac{\partial A_x}{\partial y}dxdy \qquad (\text{式 (11.9) に注意})
\end{aligned}$$

を得て、同様に $A_y dy, A_z dz$ について積分して足し合わせればストークスの定理を得ることができます。□

これまでいくつかの積分定理を扱ってきましたが、これらをすべてひとつの式に取りまとめることができます（次章で扱う**ストークスの定理**）。

例題 次のグリーンの定理（グリーンの第二公式）を示せ。S は V の表面を表す。

$$\iiint_V dV(u\Delta v - v\Delta u) = \iint_S dS\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) \tag{8.3}$$

ここで $\boldsymbol{n}$ は S を外側に垂直に向かう単位ベクトルである。

解答 ここで $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \nabla u\cdot\boldsymbol{n}$ と書けることに注意しましょう。$\nabla\cdot(u\nabla v - v\nabla u) =$

---

*4 正確には、任意の小さな領域 V に対してこれが成り立つことから示されます。

$u\Delta v - v\Delta u$ を両辺体積積分し、

$$\iiint dV \nabla \cdot (u\nabla v - v\nabla u) = \iiint dV (u\Delta v - v\Delta u)$$

左辺でガウスの発散定理を使うと

$$\iint d\boldsymbol{S} \cdot (u\nabla v - v\nabla u) = \iiint dV (u\Delta v - v\Delta u) \tag{8.4}$$

となります。ここで $d\boldsymbol{S} = dS\boldsymbol{n}$ と書けることを用いると所望の式を得ます。□

例題　次の関係が成り立つことを示せ。S は V の表面を表す。

$$\iiint_V dV (u\nabla^2 v + \nabla u \cdot \nabla v) dV = \iint_S d\boldsymbol{S} \cdot u\nabla v$$

解答　$\nabla \cdot (u\nabla v)$ の体積積分について考えましょう。ガウスの発散定理より

$$\iiint_V dV \nabla \cdot (u\nabla v) = \iint_S d\boldsymbol{S} \cdot u\nabla v$$

であり、一方積の微分により

$$\iiint_V dV \nabla \cdot (u\nabla v) = \iiint_V dV (\nabla u \cdot \nabla v + u\nabla^2 v)$$

と書け、所望の式を得ます。■

8.4　ディラックのデルタ関数*

まずは定義を与えます。デルタ関数についてはフーリエ変換の章でも触れますが、これは普通の関数の枠組みで定義することができません。

3 次元デルタ関数の定義

定義 8.1 任意の関数 $f(\boldsymbol{r})$ に対し、3 次元デルタ関数を次の性質をみたすものとして定義する。積分範囲は全空間である。

$$\iiint dV \delta(\boldsymbol{r}) f(\boldsymbol{r}) = f(0)$$

これに対し、デルタ関数の超重要公式を紹介しておきましょう。

デルタ関数とラプラシアン

定理 8.6 次が成り立つ。

$$\Delta \frac{1}{r} = -\nabla \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r})$$

フーリエ変換の章でも示しますが、ここでは別証明を与えておきます。

示すべきは任意の $f(\boldsymbol{r})$ に対し次の式が成り立つことです。

$$\iiint dV f(\boldsymbol{r}) \Delta \frac{1}{r} = -4\pi f(0) \tag{8.5}$$

まずは $r \neq 0$ のとき $\Delta \frac{1}{r} = -\nabla \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = 0$ となることに注意しましょう。すると左辺はほとんど $\boldsymbol{r} \neq 0$ の領域で 0 となってしまい、いくらでも小さくできる正実数 ϵ を半径とする原点中心の球に対して

$$(8.5)\ \text{式左辺} = \iiint_{V_\epsilon} dV f(\boldsymbol{r}) \Delta \frac{1}{r} \tag{8.6}$$

と書けるはずです。そこで式 (8.6) 右辺から出発しましょう。$\Delta \frac{1}{r} = -\nabla \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ となることと、積の微分 $\nabla fg = f\nabla g + g\nabla f$ に注意して

$$(8.6)\ \text{式右辺} = -\iiint_{V_\epsilon} dV f(\boldsymbol{r}) \nabla \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = -\iiint_{V_\epsilon} dV \nabla \cdot \left(f(\boldsymbol{r}) \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \right) + \iiint_{V_\epsilon} dV (\nabla f) \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{8.7}$$

とします。式 (8.7) 右辺第二項を計算しましょう。109 ページで取り上げる式 (9.7)

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \boldsymbol{e}_\phi$$

において、$\boldsymbol{e}_r = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$ であること、および $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\phi$ がそれぞれ直交していることから式 (8.7) 右辺第二項は極座標積分により

$$\iiint_{V_\epsilon} dV \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial r} = \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{\int_0^\epsilon \frac{\partial f}{\partial r} dr}$$

となり、ϵ をほとんど 0 と取れば波線部 $\to 0$ となることがわかります。次に、式 (8.7) 右辺第一項はガウスの発散定理により

$$-\int_{V_\epsilon} d\boldsymbol{S} \cdot f(\boldsymbol{r}) \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = -\iint_{\partial V_\epsilon} dS \cdot f(\boldsymbol{r}) \frac{1}{r^2}$$

と書くことができます。ここで ∂V_ϵ は半径 ϵ の球の表面を表します。極座標で $dS = r^2 \sin\theta d\theta d\phi$ と書けることから、上の式はさらに

$$-\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta f(\boldsymbol{r})$$

と書けます。積分領域はほとんど原点表面であり、$r = \epsilon \to 0$ であるため $f(\boldsymbol{r}) \to f(0)$ であり、このとき上の式は

$$-4\pi f(0)$$

となります。これらを整理すると $\epsilon \to 0$ で式 (8.7) 右辺は $-4\pi f(0)$ となることがわかり、結局式 (8.5) の成立が示せました。□

例題 真空中の静止した電荷分布 $\rho(\boldsymbol{r})$ が作る電場はクーロンの法則から

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint \frac{\rho(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}dV'$$

で与えられる。デルタ関数を用いて、この式が真空中のマクスウェル方程式 $\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \rho/\epsilon_0$ の解であることを確かめよ。

解答 デルタ関数の性質 $\nabla\cdot\dfrac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} = 4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ を用いましょう。与式両辺の左から $\nabla\cdot$ を作用させると

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint 4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')dV' = \frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\epsilon}$$

となって、マクスウェル方程式を得ました。これで、与式が解になっていることが確かめられます（示せたわけではありません）。■

ちなみに、Biot-Savart(ビオ・サバール)の法則

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV'$$

が、定常状態における真空中のマクスウェル方程式 $\nabla\times\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{J}$ の間についても成り立つことが確かめられます。

8.5 演習問題

1 曲線 C の端点を A, B とする。あるベクトル場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ の線積分

$$\phi(C) \equiv \int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$$

を考える。$\phi(C)$ が端点にのみ依存することと、$\boldsymbol{F}$ はスカラー場であることと同値であることを示せ。

2 ラプラス方程式 $\Delta\phi = 0$ について、以下の命題を示せ。

(1) 原点を中心とした半径 a の球 V の表面 S について次が成り立つ。

$$\phi(0) = \frac{1}{4\pi a^2}\iint_S \phi(\boldsymbol{r})dS$$

（これは球面における ϕ の平均値が $\phi(0)$ に等しいことを表す）

(2) ある領域で $\Delta\phi = 0$ が成り立つとき、領域の内部では ϕ は最大値、最小値を取り得ない。(Earnshaw(アーンショウ)の定理)

3* ポアソンの微分方程式について、以下の各問に答えよ。

(1) 領域 V の境界を S とし、$\boldsymbol{r}'$ をパラメータとする次の方程式

$$\Delta G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \ \ (\boldsymbol{r}\in V), \ \ G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = 0 \ \ (\boldsymbol{r}\in S)$$

の解 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ を考えよう。$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})$ が成り立つことを示せ。

(2) 境界条件として境界値が与えられたポアソン方程式

$$\Delta\phi = -f(\boldsymbol{r})\ (\boldsymbol{r} \in V)\ ,\ \phi(\boldsymbol{r}) = h(\boldsymbol{r})\ (\boldsymbol{r} \in S)$$

の解 $\phi(\boldsymbol{r})$ が次のように与えられることを示せ。

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \iiint_V f(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')dV' - \iint_S h(\boldsymbol{r}')\nabla' G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot d\boldsymbol{S}'$$

ただし S', ∇' は $\boldsymbol{r}'$ 変数に対するものとする。

(3) 領域 V を三次元空間全体にとり、静電ポテンシャルのポアソン方程式

$$\Delta\phi = -\frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\epsilon_0},\ \phi \to 0(r \to \infty)$$

の解を $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ で表せ。

解答

1 端点 A, B を持つ C とは異なる曲線 C' を考えます。すると、$\phi(C)$ が曲線の形によらず、端点のみによって決まるのなら $\phi(C)-\phi(C')=0$ が成り立つはずです。そこで、ストークスの定理により

$$\phi(C)-\phi(C') = \int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} - \int_{C'} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{C-C'} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \iint_S (\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot d\boldsymbol{S}$$

と書けます。ここで、S は C と C' に囲まれた平面です。これが 0 になるには $\nabla\times\boldsymbol{F}=0$ が成り立てばよく、また逆に $\nabla\times\boldsymbol{F}=0$ なら $\phi(C)-\phi(C')=0$ が成り立ちます。このとき $\nabla\times\nabla=0$ により $\boldsymbol{F}=-\nabla\Phi$ と書けるような Φ が存在することになります。これで所望の結果が得られました。
$\Phi=\phi$ であり、このようなポテンシャルによって記述される力 $\boldsymbol{F}$ を**保存力**と呼びます。

2 (1) グリーンの第二公式 (8.4) で $u \to \phi, v \to \dfrac{1}{r}$ とすると

$$\iiint_V dV\left(\phi\Delta\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\Delta\phi\right) = \iint_S d\boldsymbol{S}\cdot\left(\phi\nabla\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\nabla\phi\right)$$

ここで $\Delta\dfrac{1}{r} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}), \nabla\dfrac{1}{r} = -\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ および $\Delta\phi=0$ を用いると

$$-4\pi\iiint_V dV\delta(\boldsymbol{r})\phi(\boldsymbol{r}) = -\iint_S d\boldsymbol{S}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\phi(\boldsymbol{r}) - \iint_S d\boldsymbol{S}\cdot\frac{1}{r}\nabla\phi$$

となり、左辺は $-4\pi\phi(0)$ になります。一方、右辺については、領域表面 S で $r=a$（一定）であることから、右辺第一項は $\boldsymbol{r}$ と $d\boldsymbol{S}$ が平行なので

$$-\iint_S d\boldsymbol{S}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\phi(\boldsymbol{r}) = -\iint_S dS\frac{1}{a^2}\phi(\boldsymbol{r})$$

となり、右辺第二項はガウスの発散定理と $\Delta\phi = 0$ により

$$-\iint_S d\boldsymbol{S}\cdot\frac{1}{r}\nabla\phi = -\frac{1}{a}\iint_S d\boldsymbol{S}\nabla\phi = -\frac{1}{a}\iint_V dV\nabla\cdot(\nabla\phi) = 0$$

となります。よって、所望の式

$$\phi(0) = \frac{1}{4\pi a^2}\iint_S dS\phi(\boldsymbol{r})$$

が得られます。これは原点での値が、球表面での平均値に対応していることを表します。

(2) 原点で $\phi(\boldsymbol{r})$ が最大になると仮定しても一般性は失いません。このとき $\phi(\boldsymbol{r}) < \phi(0)$ $(\boldsymbol{r} \in S)$ により (1) の主張から

$$\phi(0) = \frac{1}{4\pi a^2}\iint_S \phi(\boldsymbol{r})dS < \frac{1}{4\pi a^2}\iint_S \phi(0)dS = \phi(0)$$

となってしまいます。$\phi(0)$ を最小値と仮定しても同様の矛盾が起こり、背理法から主張が示せました。

3 **グリーン関数**を用いると非斉次偏微分方程式の解が容易に作れます。グリーン関数の章でもこのような問題を取り上げています。

(1) グリーンの第二公式 (8.4) を用います。$u \to G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'), v \to G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')$ とすると

$$\begin{aligned}&\iiint_V dV(G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\Delta G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'') - G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')\Delta G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'))\\ &= \iint_S d\boldsymbol{S}\cdot\Big(G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\nabla G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'') - G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')\nabla G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\Big)\end{aligned}$$

となり、右辺は境界条件より 0 になります。左辺は $\Delta G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ より $G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'') - G(\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}')$ となり、所望の式を得ます。

(2) 再びグリーンの第二公式 (8.4) を用います。今度は $u \to \phi(\boldsymbol{r}), v \to G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ として

$$\begin{aligned}&\iiint_V dV\big(\phi(\boldsymbol{r})\Delta G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') - G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\Delta\phi(\boldsymbol{r})\big)\\ &= \iint_S d\boldsymbol{S}\cdot\Big(\phi(\boldsymbol{r})\nabla G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') - G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\nabla\phi(\boldsymbol{r})\Big)\end{aligned}$$

となります。境界条件から右辺は $\iint_S d\boldsymbol{S}h(\boldsymbol{r})\nabla G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ となり、両辺で $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{r}'$ を入れ替えると所望の式が得られます。

(3) $f = \rho/\epsilon_0, h(\boldsymbol{r}) = 0$ とし、空間全体の積分を考えれば

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \iiint \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{\epsilon_0}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')dV'$$

を得ます。■

第9章

微分形式とスケール因子

ここでは微分形式を導入してベクトル解析の計算をより簡略化します。話の枕に微積分を思い出してみましょう。変数 x と y の組みを変数 u と v の組みに書き換える（変数変換する）とき、置換積分の多変数バージョンとして $dxdy = |J|dudv$ となる $J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$ をヤコビアンと呼ぶのでした。ところでこの J に対し、$y = x$ とすると $J = 0$ になってしまい、$dxdx = 0$？ となります。今度は J が正だったとして、$dxdy = Jdudv$ が成り立つとします。x と y を入れ替えると行列成分の入れ替えで J の符号が反転するので $dydx = |J|dudv = -Jdudv$ となり、右辺を比較してやると、どうも $dxdy = -dydx$？ となりそうです。そこで新しく $dx \wedge dy = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} du \wedge dv$ なるものを定めてやると、$dx \wedge dx = 0,\ dx \wedge dy = -dy \wedge dx$ がそれぞれ成り立つことがわかりますね。ベクトル代数の洒落で、$dx \wedge dy$（ウェッジ積）を**微分形式の外積**と呼びます。$\wedge$ はウェッジと読みます。以下では、いよいよこの微分形式のルールを解説していきます。

9.1 外微分と微分形式

本章では3次元空間に限定するとし、**ここでは縮約を用いて**議論します。

微分形式

定義 9.1 任意の3変数関数 $f(x,y,z)$ と微分形式およびその外積（ウェッジ積）について次が成り立つ。x, y, z はそれぞれ x^1, x^2, x^3 とも記す。

$$dx \wedge dx = 0,\ dx \wedge dy = -dy \wedge dx,\ df = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx^i \equiv \partial_i f dx^i \tag{9.1}$$

ただし $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ であり、最後の式で f が微分形式を持つ、例えば $f = g_j dx^j$ なら次のように記すとします。

$$df = d(g_j dx^j) = \partial_i g_j dx^j \wedge dx^i$$

式 (9.1) の 3 つめの性質は全微分から来ているものです。[*1] 表記はテンソル解析の内容にしたがって縮約を用いていることに気をつけましょう。

外微分演算子の性質

> **定理 9.1** $d^2 = 0$ が成り立つ。

これは次のように示せます。

$$
\begin{aligned}
ddf &= d(\partial_i f dx^i) = \partial_j(\partial_i f dx^i) \wedge dx^j = \frac{1}{2}\left(\partial_j \partial_i f dx^i \wedge dx^j\right) \times 2 \\
&= \frac{\partial_j \partial_i f dx^i \wedge dx^j + \partial_j \partial_i f dx^i \wedge dx^j}{2} \\
&= \frac{\partial_j \partial_i f dx^i \wedge dx^j - \partial_j \partial_i f dx^j \wedge dx^i}{2} \quad (\text{第二項で } dx^i \text{ と } dx^j \text{ を取り替えた}) \\
&= \frac{\partial_j \partial_i f dx^i \wedge dx^j - \partial_i \partial_j f dx^i \wedge dx^j}{2} \quad (\text{第二項で } i \text{ と } j \text{ を取り替えた}) \\
&= \frac{1}{2}(\partial_j \partial_i - \partial_i \partial_j) f dx^i \wedge dx^j = 0 \quad (\because\ \partial_j \partial_i f = \partial_i \partial_j f \text{ より})
\end{aligned}
$$

改めてこの d を**外微分演算子**と呼ぶことにしましょう。また、$dx, dx \wedge dy, dx \wedge dy \wedge dz$ をそれぞれ**一形式、二形式、三形式**と呼びます。ところで例えば二形式に外微分演算子をほどこすと

$$
d(dx \wedge dy) = \partial_i(dx \wedge dy) \wedge dx^i
$$

のように三形式で書けます。一般に n 形式に外微分演算子をほどこすと $(n+1)$ 形式となります。

例題 一形式 $A_i dx^i = Adx + Bdy + Cdz$ に外微分演算子を作用させよ。

解答 $d(A_i dx^i) = \partial_j A_i dx^i \wedge dx^j$ であることに気をつけましょう。$i, j = 1, 2, 3$ であるから、i を固定してやれば $j = i+1, i-1$ しか残りませんね（$dx^i \wedge dx^i = 0$ より）。これより j について和を取って

$$
\begin{aligned}
d(A_i dx^i) &= \partial_{i+1} A_{i+1} dx^i \wedge dx^{i+1} + \partial_{i-1} A_{i-1} dx^i \wedge dx^{i-1} \\
&\quad \left(\text{第二項で } i \to i+1 \text{ とする}\right) \\
&= \partial_{i+1} A_{i+1} dx^i \wedge dx^{i+1} + \partial_i A_i dx^{i+1} \wedge dx^i \\
&= \partial_{i+1} A_{i+1} dx^i \wedge dx^i + \partial_{i+1} A_i dx^i \wedge dx^{i+1} \\
&= (\partial_{i+1} A_{i+1} - \partial_i A_i) dx^i \wedge dx^{i+1} \\
&= \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}\right) dz \wedge dx
\end{aligned}
$$

[*1] 表記をテンソルに切り替えただけです。

$$
df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = \partial_i f dx^i \quad (\text{テンソルの縮約})
$$

となって、回転 (rot) もしくは（ベクトル解析の）外積の形が見えてきますね。■

例題 二形式 $fdx \wedge dy + gdy \wedge dz + hdz \wedge dx$ に外微分演算子を作用させよ。

解答 例えば $dx \wedge dy$ に外微分演算子を施すと $d(fdx \wedge dy) = \partial_i f dx \wedge dy \wedge dx^i$ となりますが、$i = 3$ の項しか残りませんから、結局 $d(fdx \wedge dy) = \dfrac{\partial f}{\partial z} dx \wedge dy \wedge dz$ となり、これを各項について足し合わせると

$$d\,(\text{与式}) = \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y}\right) dx \wedge dy \wedge dz$$

となって答えが得られます。発散 (div) もしくは内積のような構造が見えますね。■

さて、これを使ってヤコビアンを計算してみましょう。

例題 次の変数変換に対してヤコビアンを計算せよ。

(1) 2 次元極座標 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$

(2) 3 次元球座標 $x = r\sin\theta\cos\phi, y = r\sin\theta\sin\phi, z = r\cos\theta$

解答 ウェッジ積をそれぞれ計算するだけです。

(1) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくと、$dx = \dfrac{\partial}{\partial r}(r\cos\theta)dr + \dfrac{\partial}{\partial\theta}(r\cos\theta)d\theta = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta$ となり、同様に $dy = \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta$ を得る。これより

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= (\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta) \wedge (\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta) \\ &= r\cos^2\theta dr \wedge d\theta - r\sin^2\theta d\theta \wedge dr \\ &= r dr \wedge d\theta \end{aligned}$$

となり、ヤコビアン r を得ます。途中で $dr \wedge d\theta = -d\theta \wedge dr$ を用いました。

(2) $x = r\sin\theta\cos\phi, y = r\sin\theta\sin\phi, z = r\cos\theta$ とおくと

$$\begin{aligned} dx &= \sin\theta\cos\phi dr + r\cos\theta\cos\phi d\theta - r\sin\theta\sin\phi d\phi \\ dy &= \sin\theta\sin\phi dr + r\cos\theta\sin\phi d\theta + r\sin\theta\cos\phi d\phi \\ dz &= \cos\theta dr - \sin\theta d\theta \end{aligned} \tag{9.2}$$

のように書け、これより $dx \wedge dy \wedge dz = r^2 \sin\theta dr \wedge d\theta \wedge d\phi$ が得られます。■

9.2 ホッジスター演算子

3 次元空間において、1 形式から 2 形式を取り出し、逆に 2 形式からは 1 形式を取り出すような演算子、**ホッジスター演算子**を次のように定めます。

3次元でのホッジスター演算子

定義 9.2 次のように*演算子（ホッジスター）を定める。

$$
\begin{aligned}
&* dx = dy \wedge dz, *dy = dz \wedge dx, *dz = dx \wedge dy \\
&* (dx \wedge dy) = dz, *(dz \wedge dx) = dy, *(dx \wedge dy) = dz \\
&* 1 = dx \wedge dy \wedge dz, *(dx \wedge dy \wedge dz) = 1
\end{aligned}
$$

上のルールからすぐに $** = 1$ が得られます。[*2] また、レヴィ・チビタのイプシロンを用いると $*dx^i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}dx^j \wedge dx^k$ のように表せます（縮約に注意）。ホッジスターを用いて grad,div,rot,divgrad の構造がそれぞれ次のように与えられます。

ホッジスターを用いた諸公式

定理 9.2 次がそれぞれ成り立つ。ただし f は零形式、v は一形式とする。

$$df = (\mathrm{grad} f)_i dx^i \tag{9.3}$$

$$* (d * v) = \mathrm{div}\boldsymbol{v} \tag{9.4}$$

$$* dv = (\mathrm{rot}\boldsymbol{v})_i dx^i \tag{9.5}$$

$$* d * df = \Delta f \tag{9.6}$$

ここでは式（9.6）について示しておきましょう。他も同様に示せます。

まず $*df = *(\partial_i f dx^i) = \frac{1}{2}(\partial_i f)\epsilon_{ijk}dx^j \wedge dx^k$ より $d*df = \frac{1}{2}\partial_l\partial_i f\epsilon_{ijk}dx^j \wedge dx^k \wedge dx^l$ のように書けます。右辺は $l = i$ の項のみ残るので、[*3]

$$
\begin{aligned}
d * df &= \frac{1}{2}\partial_i\partial_i f\epsilon_{ijk}dx^j \wedge dx^k \wedge dx^i \\
&= \frac{1}{2}\partial_i\partial_i f\epsilon_{ijk}dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k
\end{aligned}
$$

のように書け、縮約に気をつけて $i = 1, 2, 3$ について和を書き下すと

$$
\begin{aligned}
d * df = &\frac{1}{2}\partial_1\partial_1 f\big(\epsilon_{123}dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \frac{1}{2}\epsilon_{132}dx^1 \wedge dx^3 \wedge dx^2\big) \\
&+\frac{1}{2}\partial_2\partial_2 f\big(\epsilon_{213}dx^2 \wedge dx^1 \wedge dx^3 + \epsilon_{231}dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^1\big) \\
&+ \frac{1}{2}\partial_3\partial_3 f\big(\epsilon_{312}dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^2 + \epsilon_{321}dx^3 \wedge dx^2 \wedge dx^1\big) \\
= &\big(\partial_1\partial_1 + \partial_2\partial_2 + \partial_3\partial_3\big)f dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
= &\Delta f
\end{aligned}
$$

が得られます。途中でイプシロンの反対称性とウェッジ積の反対称性を用いました。これで $*d * df = \Delta f dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ が得られます。□

これだけだとちょっと悪趣味ですね。実際にこれを使ってみましょう。球座標ラプラシアンを導出して見せます。

[*2] 一般に n 次元上で k 形式 ω_k を考えている際は $* * \omega_k = (-1)^{(n-k)k}\omega_k$ が成立します。

[*3] ϵ_{ijk} と $dx^l \wedge dx^j \wedge dx^k$ がともに 0 にならないのは「i, j, k が異なる添字」かつ「l, j, k が異なる添字」が成り立つときのみで、このとき $i = l$ のときの項だけが残るとわかります。

例題 3 次元ラプラシアンを $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ で定める。ここで $x = r\sin\theta\cos\phi, y = r\sin\theta\sin\phi, z = r\cos\theta$ （3 次元球座標）に変換したとき、Δ を r, θ, ϕ の微分で表せ。

解答 式 (9.2) の共通因子をくくりだし、ベクトル表示すると

$$d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_r dr + \boldsymbol{e}_\theta r d\theta + \boldsymbol{e}_\phi r\sin\theta d\phi$$

のように書けます。[*4] 新しい微分形式を $du^1 = dr, du^2 = rd\theta, du^3 = r\sin\theta d\phi$ とします。このとき $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = du^1 \wedge du^2 \wedge du^3$ であり、$*du^1 = du^2 \wedge du^3, *(du^1 \wedge du^2) = du^3$ のように、dx^1, dx^2, dx^3 同様の性質が成り立ちます。これより

$$\begin{aligned} df &= \partial_r f dr + \partial_\theta f d\theta + \partial_\phi f d\phi \\ &= \frac{\partial f}{\partial r} du^1 + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} du^2 + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi} du^3 \end{aligned}$$

となり、[*5] 両辺にホッジスターをほどこし、

$$*df = \frac{\partial f}{\partial r} du^2 \wedge du^3 + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} du^3 \wedge du^1 + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi} du^1 \wedge du^2$$

とし、さらに両辺に外微分 d をほどこすと

$$\begin{aligned} d*df =& d\frac{\partial f}{\partial r} du^2 \wedge du^3 + d\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} du^3 \wedge du^1 + d\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi} du^1 \wedge du^2 \\ =& \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\tan\theta}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \right) du^1 \wedge du^2 \wedge du^3 \end{aligned}$$

となり、さらに両辺にホッジスターを施すとラプラシアン

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\tan\theta}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

が得られます。■

9.3 スケール因子と座標変換

先の例題での議論を一般化しましょう。まずは**縮約を使わずに和の記号を用いて**議論します。直交座標のベクトル $\boldsymbol{x} = (x^1, x^2, x^3)$ を、曲線座標 u^1, u^2, u^3 を用いて書

*4 それぞれの単位ベクトルは次のようになります。

$$\boldsymbol{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

*5 この式はベクトル解析の言葉で

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\boldsymbol{e}_\phi \tag{9.7}$$

と書けます。

き換えることを考えましょう。このとき全微分 $d\boldsymbol{x}$ は次のように書けます。

$$d\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u^i} du^i$$

ここでスケール因子を定義します。

スケール因子と単位ベクトル

定義 9.3 スケール因子 h_i を次で定める。

$$h_i \equiv \sqrt{\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u^i}}$$

また、ベクトル $\hat{\boldsymbol{u}}_i$ を $\hat{\boldsymbol{u}}_i = \dfrac{1}{h_i} \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u^i}$ で定め、さらに dx^i を $dx^i \equiv h_i du^i$ で定める。

このとき $\hat{\boldsymbol{u}}_i$ は単位ベクトルであり、$d\boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{u}}_i dx^i$ が成り立ちます。さて、関数 f に外微分形式を作用させると

$$df = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial u^i} du^i = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial u^i} dx^i$$

と書けます。f の変数を u^i に取っていることに注意して下さい。ここで定理 9.2 により（縮約を取らない表記で）$df = \sum_{i=1}^{3} (\mathrm{grad} f)_i dx^i$ と書けることから、

$$(\mathrm{grad} f)_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial u^i}$$

が成り立ちます。次に div、rot について考えましょう。1 形式 v を次のようにして用意します。

$$v = \sum_{i=1}^{3} v_i dx^i = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i v_i du^i$$

これに外微分を作用させ、

$$dv = \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial h_i v_i}{\partial u^i} du^j \wedge du^i = \sum_{i,j=1}^{3} \frac{1}{h_i h_j} \frac{\partial h_i v_i}{du^j} dx^j \wedge dx^i$$

となり、さらにホッジスターを取って

$$*dv = \sum_{k=1}^{3} \frac{\epsilon_{ijk}}{h_i h_j} \left(\frac{\partial h_j v_j}{\partial u^i} - \frac{\partial h_i v_i}{\partial u^j} \right) dx^k$$

を得ます。式 (9.5) と比較すれば

$$(\mathrm{rot}\boldsymbol{v})_k = \frac{\epsilon_{ijk}}{h_i h_j} \left(\frac{\partial h_j v_j}{\partial u^i} - \frac{\partial h_i v_i}{\partial u^j} \right)$$

が得られます。同様に、定理 9.2 を鑑みて、$*(d * v), *d * df$ を求めることで、次の結果を得ることができます。

スケール因子と座標変換

定理 9.3 次が成り立つ。

$$\nabla f = \left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u^1}, \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u^2}, \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u^3}\right) \tag{9.8}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left(\frac{\partial h_2 h_3 v_1}{\partial u^1} + \frac{\partial h_3 h_1 v_2}{\partial u^2} + \frac{\partial h_1 h_2 v_3}{\partial u^3}\right) \tag{9.9}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \left[\frac{1}{h_2 h_3}\left(\frac{\partial h_3 v_3}{\partial u^2} - \frac{\partial h_2 v_2}{\partial u^3}\right), \frac{1}{h_3 h_1}\left(\frac{\partial h_1 v_1}{\partial u^3} - \frac{\partial h_3 v_3}{\partial u^1}\right), \right. \tag{9.10}$$

$$\left. \frac{1}{h_1 h_2}\left(\frac{\partial h_2 v_2}{\partial u^1} - \frac{\partial h_1 v_1}{\partial u^2}\right)\right] \tag{9.11}$$

$$\Delta f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u^1}\right) + \frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u^2}\right) + \frac{\partial}{\partial u^3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u^3}\right) \tag{9.12}$$

あるいは、$\nabla = \sum_{i=1}^{3} \hat{\boldsymbol{u}}_i \dfrac{1}{h_i}\dfrac{\partial}{\partial u^i}$ と書けることを利用して、次のように表すこともできます。

スケール因子と座標変換

定理 9.4 スカラー場 $f(\boldsymbol{x})$ およびベクトル場 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ に対して次が成立する。

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{3} \frac{\hat{\boldsymbol{u}}_i}{h_i}\frac{\partial f}{\partial u^i} \tag{9.13}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial u^i}\left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_i}A_i\right) \tag{9.14}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\sum_{ijk=1}^{3} \hat{\boldsymbol{u}}_i h_i \epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial u^j}(h_k A_k) \tag{9.15}$$

$$= \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{u}}_1 h_1 & \hat{\boldsymbol{u}}_2 h_2 & \hat{\boldsymbol{u}}_3 h_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial u^i}\left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_i^2}\frac{\partial \psi}{\partial u^i}\right) \tag{9.16}$$

これらの性質は座標変換する際に非常に便利です。

9.4 極座標の変換

特に重要な円筒座標、球座標の変換結果についてまとめておきます。

9.4.1 円筒座標

円筒座標は変数を (ρ, ϕ, z) と取り、$x = \rho\cos\phi, y = \rho\sin\phi, 0 \leq \phi < 2\pi$ とします。

$$\begin{aligned}
\nabla\psi &= \left(\frac{\partial\psi}{\partial\rho},\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\phi},\ \frac{\partial\psi}{\partial z}\right) \\
\nabla\cdot\boldsymbol{A} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_1)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_2}{\partial\phi} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \\
\nabla\times\boldsymbol{A} &= \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_3}{\partial\phi} - \frac{\partial A_2}{\partial z},\ \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial\rho},\ \frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial(\rho A_2)}{\partial\rho} - \frac{\partial A_1}{\partial\phi}\right\}\right) \\
\nabla^2\phi &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}
\end{aligned}$$

9.4.2 球座標

球座標では変数を (r, θ, ϕ) と取り、$x = r\sin\theta\cos\phi, y = r\sin\theta\sin\phi, z = r\cos\theta, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi < 2\pi$ とします。

$$\begin{aligned}
\nabla\psi &= \left(\frac{\partial\psi}{\partial r},\ \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\right) \\
\nabla\cdot\boldsymbol{A} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_1)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_2)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_3}{\partial\phi} \\
\nabla\times\boldsymbol{A} &= \left(\frac{1}{r\sin\theta}\left\{\frac{\partial(\sin\theta A_3)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_2}{\partial\phi}\right\},\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_1}{\partial\phi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_3)}{\partial r},\ \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial(rA_2)}{\partial r} - \frac{\partial A_1}{\partial\theta}\right\}\right) \\
\nabla^2\psi &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} \\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}
\end{aligned}$$

9.5 ストークスの積分定理

ここから縮約を復活させます。微分積分学の基本定理

$$\int_{x=a}^{b} dF = \int_a^b \frac{dF}{dx}dx = F(b) - F(a)$$

を思い出してみましょう。ちょうどこの右辺は区間 $A = [a, b]$ の端点の寄与を受けたものと見なせ、上の式は

$$\int_A dF = \int_{\partial A} F$$

のように書き直せます。∂A は区間 A の両端点を表します。これを一次元に限らず、任意次元の閉領域 D において微分形式 ω を対象にして考えるのが、次のストークスの定理です。

ストークスの積分定理

定理 9.5 次が成り立つ。D は閉領域で ∂D はその境界を表す。

$$\int_D \omega = \int_{\partial D} d\omega$$

さすがに一般次元での証明はここまでのアイテムだけではできないので差し控えますが、本質的にはガウスの発散定理やストークスの定理の証明で微分積分学の基本定理を使ったのと同じです。例えば ω を 1 形式に取るとベクトル解析の章で紹介したストークスの定理となり、2 形式に取るとガウスの発散定理となります。

実際、本章冒頭の例題で計算したように、1 形式 $\omega^1 = A_i dx^i$ に外微分を作用させた式

$$d\omega = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)dy \wedge dz + \left(\frac{\partial A_2}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)dz \wedge dx + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)dx \wedge dy$$

となり、微小面積 $d\boldsymbol{S}$ に $(dy \wedge dz, dz \wedge dx, dy \wedge dz)$ を対応させるとストークスの定理

$$\oint_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{x} = \iint_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot d\boldsymbol{S}$$

が再現できます。また、2 形式 $\omega = A_1 dy \wedge dz + A_2 dz \wedge dx + A_3 dx \wedge dy$ に外微分を作用させると

$$d\omega = \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right)dx \wedge dy \wedge dz$$

となり、微小体積 dV に $dx \wedge dy \wedge dz$ を対応させるとガウスの発散定理

$$\iint_S \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{A} dV$$

が再現できます。このように、次元を限ってもなお豊かな性質を持った定理です。

9.6　演習問題

1　1 形式 $E = E_1 dx^1 + E_2 dx^2 + E_3 dx^3$ と 2 形式 $B = B_1 dx^2 \wedge dx^3 + B_2 dx^3 \wedge dx^1 + B_3 dx \wedge dx^2$ に対し、$d * E$ と dB を計算せよ。

2　dE を計算せよ。

解答 E と B はそれぞれマクスウェル方程式の電場と磁場に対応しています。

1　まず $*E = E_1 dx^2 \wedge dx^3 + E_2 dx^3 \wedge dx^1 + E_3 dx^1 \wedge dx^2$ であり、さらに外微分演算子をかけて

$$\begin{aligned} d * E &= \frac{\partial E_1}{\partial x_1} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \frac{\partial E_2}{\partial x_2} dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^1 \frac{\partial E_3}{\partial x_3} dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \\ &= \left(\frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \frac{\partial E_3}{\partial x_3}\right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \end{aligned}$$

を得ます。次に B に外微分演算子を掛けて

$$dB = \left(\frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} + \frac{\partial B_3}{\partial x_3}\right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

を得ます。$\rho = \rho dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ とおき、マクスウェル方程式 $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho/\epsilon_0$ および $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ と比較すれば、これらの式は微分形式で $d * E = \rho/\epsilon_0$、$dB = 0$ と書き直せることがわかります。

2　まずは

$$dE = \left(\frac{\partial E_3}{\partial x^2} - \frac{\partial E_2}{\partial x^3}\right) dx^2 \wedge dx^3 + \left(\frac{\partial E_2}{\partial x^3} - \frac{\partial E_3}{\partial x^1}\right) dx^3 \wedge dx^1 + \left(\frac{\partial E_2}{\partial x^1} - \frac{\partial E_1}{\partial x^2}\right) dx^1 \wedge dx^2$$

であり、マクスウェル方程式 $\nabla \cdot \boldsymbol{E} + \dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ と比較して $dE + \dfrac{\partial B}{\partial t} = 0$ を得ます。ちなみにマクスウェル方程式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}\boldsymbol{j}$$

と比較して、$j = j_1 dx^2 \wedge dx^3 + j_2 dx^3 \wedge dx^1 + j_3 dx^1 \wedge dx^2$ とおくと $d * B - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial * E}{\partial t} = \dfrac{1}{\epsilon_0 c^2} j$ が成り立つことがわかります。

第 10 章

複素関数論

ここでは複素数を変数とする複素関数について扱います。複素関数の計算は実関数のそれとほとんど一緒ですが、複素関数特有の周期性や、そこから誘導される対数関数独特の性質などに注意して読み進めていきましょう。

10.1 複素数と複素関数ことはじめ

複素数に関する諸々の定義

定義 10.1 $i = \sqrt{-1}$ を虚数単位とし、実数 a, b を用いて $c = a + bi$ を複素数 (あるいは虚数) と呼ぶ。逆に a, b を c で表すときに

$$a = \Re(c),\ b = \Im(c)$$

と書く。$\Re(c)$, $\Im(c)$ をそれぞれ c の**実部**、および**虚部**と呼び、特に $\Re(c) = 0$ で表される複素数 bi を純虚数と呼ぶ。また、$\bar{c} = a - bi$ を c の**共役複素数**と呼ぶ。ここで $|c|$ を

$$|c| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{c \cdot \bar{c}}$$

で定義し、複素数 c の**絶対値**と呼ぶ。

例題 $z = x + yi$ とおくとき、x, y を z, $\bar{z}$ で表せ。

解答 $\bar{z} = x - yi$ により、x, y は次のように書けます。

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2},\ y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

複素数を関数に拡張して 2 変数関数

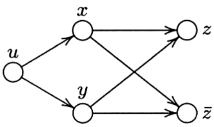
$$w(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$$

を考えましょう。ただし $u(x, y)$, $v(x, y)$ は実関数とします。x, y を一つの変数 $z = x + yi$ にまとめ、$w(x, y)$ を z の関数 $f(z)$ として書けると仮定しましょう。そ

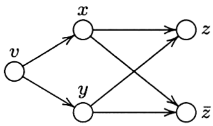
のためには、パラメータ変数 (x, y) の組を複素パラメータ $(z, \bar{z})$ に書き換え、

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \qquad (f \text{ が } \bar{z} \text{ の関数ではない})$$

が成立する必要があります。この仮定のもとで、$f(z)$ を z の関数として微分、積分することを目指すのです。偏微分の章で扱ったフローチャート



および、



から $\dfrac{\partial u}{\partial \bar{z}}, \dfrac{\partial v}{\partial \bar{z}}$ を求めます。

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{1}{2} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{1}{2i}$$
$$\frac{\partial v}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{1}{2} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{1}{2i}$$

ただし先の例題で得た結果を使いました。ここで、はじめの仮定に従って

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + i\frac{\partial v}{\partial \bar{z}} = \underline{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)i = 0}$$

と書くことができ、下線部の実部と虚部を比較して次の定理が得られます。[*1]

Cauchy(コーシー)-Riemann(リーマン)の関係式

定理 10.1 $f(z) = u + vi$ が z で正則である必要十分条件は $f(z)$ が微分可能で

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{かつ} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

が成立することである。また、この関係式は $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \Leftrightarrow (f \text{ が } \bar{z} \text{ を含まない})$ と同値である。

$f(z)$ が $z = z_0$ およびその近傍で微分可能であるとき、$f(z)$ は正則であるといいます。このステートメントを逆に利用すれば、2 変数の複素数値関数 $u(x, y) + iv(x, y)$ について、変数を x, y から z に統合できるかどうかの判定ができるようになります。

例題　任意の複素数 $z, \bar{z}$（あるいは任意の実数 x, y）を変数にもつ以下の関数について各問に答えよ。

(1)　次の関数 $F(x, y) = e^x \cos y + ie^x \sin y$ は正則か。

(2)　関数 $f(z, \bar{z}) = z^3 - 3z^2\bar{z} + 3z\bar{z}^2 - \bar{z}^3$ の正則領域を求めよ。

解答　コーシー・リーマンの関係式を使うだけです。

[*1] 普通は x, y の片方ずつを固定して微分を考えることで証明しますが、ここでは省略。

(1)　F を実部と虚部にわけ、$u = e^x \cos y,\ v = e^x \sin y$ とおくと、$\dfrac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y$、$\dfrac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y$、$\dfrac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y$、$\dfrac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y$ と書くことができ、コーシー・リーマンの方程式を満たします。つまり $F(x, y)$ は正則であることがわかります。

(2)　$z = x + yi$ とおけば $f = (z - \bar{z})^3 = 8y^3 i$ と書け、コーシー・リーマンの方程式を満たす y の範囲を考えます。実部と虚部にわけると $u = 0,\ v = 8y^3$ と書けるので、$\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$、$\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$、$\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$、$\dfrac{\partial v}{\partial y} = 16y^2$ となり、コーシー・リーマンの方程式を満たすためには $y = 0$ でなければならないことがわかります。ここで変数 $z = x + yi$ が実軸上にあれば f が z で微分可能となることがわかります。しかし、これでは「実軸上の近傍で微分可能」という条件を満たすことができず、結局 f は正則でないことがわかります。ここで用いた「z が実軸上に存在」という表現については、すぐ後で説明します。

(別解)　f が $\bar{z}$ を含むので、上に示した定理の後半部より f は正則ではありません。
$\Longleftrightarrow$ 正則領域は「存在しません」。

10.2　複素関数の微分

複素関数 $f(z)$ の導関数を次のように定義します。

複素関数の微分

定義 10.2 複素平面上の領域 D において、$f'(z)$ を次のように定義する。

$$f'(z) = \frac{df}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$\Delta z \to 0$ **の近づけ方にかかわらず一通りに決まるとき**、$f'(z)$ を $f(z)$ の**導関数**と呼ぶ。また、このとき $f(z)$ が微分可能ならば $f(z)$ は (D 内で) **正則**である。

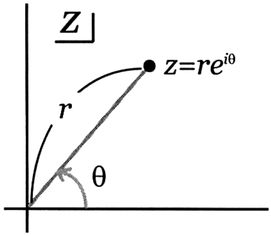
実際の微分計算は実関数のときとほとんど同じなので省略します。ここでは「$\Delta z \to 0$ の近づけ方」について注意しておきます。例えば実数 x, y の 2 変数関数 $g(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ について $x, y \to 0$ に近づける極限について考えてみましょう。

$x = 0$ **としてから** $y \to 0$　$g(0, y) = 0$ より $\displaystyle\lim_{y \to 0} g(0, y) = 0$

$y = 0$ **としてから** $x \to 0$　$g(x, 0) = \dfrac{1}{x}$ より $\displaystyle\lim_{x \to 0} g(x, 0) \to \pm\infty$

となって $\displaystyle\lim_{x,y \to 0} g(x, y)$ が一意に決まらないことがわかります。複素関数でも同様で、「$\displaystyle\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$ が、極限の近づけ方によらず一意に決まる」という性質を要求してもコーシー・リーマンの関係式が現れます。

10.3 複素平面



さて、変数を (x, y) から z に書き換えるにあたって、次のような幾何的性質を考えておく必要があります。xy 直交座標上の点 (x, y) を $z = x + yi$ に対応させます。この対応付けを右図のように書き、このような座標平面を**複素平面**と呼びます。(ふつう複素平面には軸の名前を書かず、「z 平面」というラベルをつける) また、図のように $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ を対応させ、r は $\sqrt{x^2 + y^2}$、すなわち $|z|$ に等しく、θ を z の偏角といい、$\theta = \mathrm{Arg}z$ として表します。

複素数は数であると同時に座標を指定するということが重要なのです。例えば実軸上の点は (xy 平面上での)x 軸上の点に対応することになります。

図では $z = re^{i\theta}$ と書かれていますが、これは次の定理によるものです。

オイラーの公式

定理 10.2 任意の実数 θ に対して (形式的に) 次のように書ける。

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

すでに第一章で触れていますが、これは三角関数のマクローリン展開 $\cos\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\theta^{2n}$, $\sin\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\theta^{2n+1}$ を用いて

$$\cos\theta + i\sin\theta = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(i)^{2n}}{(2n)!}\theta^{2n} + i\frac{(i)^{2n}}{(2n+1)!}\theta^{2n+1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\theta)^n}{n!} = e^{i\theta}$$

と書けることに由来します。さて、これ以降は任意の複素数 z に対して複素指数関数をきちんと定義して使って行きましょう。

10.4 複素関数の具体例

10.4.1 一価関数、指数関数と三角関数

これ以降、複素数 $z = x + yi$ のみを変数に持つ $f(z)$ について考えていきましょう。三角関数を拡張するために、まず複素指数関数を定義する必要があります。

複素指数関数

定義 10.3 次の関数を定義する。

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

単に e^x のマクローリン展開において $x \to z$ としただけですが、これが指数関数

の性質[*2] をきちんと満たすかどうかチェックする必要があります (読者に任せます)。結果的にこの拡張は正しく、$\exp(z) = e^z$ と書くことが許されます。これとオイラーの公式を用いて、三角関数を次のように書くことができます。

複素三角関数の定義

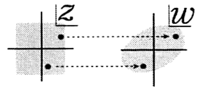
定義 10.4 複素三角関数を次のように定義する。

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

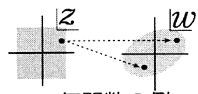
逆に、指数関数は三角関数で表されるので、実数のときとは違って**指数関数 e^z は周期 $2\pi i$ の周期関数となります。**[*3]

これらの複素関数は素朴な「関数」の定義「z が定まれば $f(z)$ の値がただひとつ定まる」を当然満たしている (**一価関数**である) のですが、例えば指数関数や三角関数について逆関数を取るとこの定義を満たさなくなってしまいます。

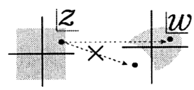
10.4.2　多価関数、逆三角関数



z と w が一対一対応
→　一価関数



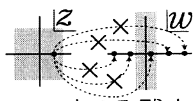
二価関数の例



枝を切った！

「z を指定したとき、$f(z)$ の値が複数指定されてしまう」という性質を持つ $f(z)$ を**多価関数**と呼びます。多価関数は関数の定義を満たさないので、そのままではうまく機能しません。「z を指定したとき $f(z)$ がただひとつ定まる」ように、右図のように不要な写像 (矢印) を消していかなければなりません。さながら、この行為を「**(枝を) 切る**」といいます。いいかえれば、多価関数を一価関数同様に機能するために、**値域 w の範囲を制限してやる**ことが「**(枝を) 切る**」ことであると言えます。

ここでは実関数の具体例で考えてみましょう。$\sin x$ は周期 2π の周期関数なので、この逆関数をとり



一本のみ残す

$$y = f(x) = \sin^{-1}(x) \ (= \arcsin(x))$$

について考えてみましょう。$x = 1$ において

$$f(1) = \sin^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}, \ \frac{\pi}{2} + 2\pi, \ \frac{\pi}{2} + 4\pi, \ \cdots$$

となり、x の値を指定しても y の値が確定しないことになってしまいます。ここで打開策として、$-\pi \leq y < \pi$ のように値域を制限すると、ただ一つの値 $f(1) = \dfrac{\pi}{2}$ が確定し、1 価関数のように振舞うことがわかります。このように、多価関数の分枝を上

[*2] マクローリン展開の収束、正則性、指数の和が指数関数の積になるかなど。

[*3] 一応、確かめておきましょう。$e^z = e^{x+yi} = e^x \cos y + ie^x \sin y$ により、$e^{z+2\pi i} = e^{x+yi+2\pi i} = e^x \cos(y + 2\pi i) + ie^x \sin(y + 2\pi i) = e^z$ となりますね。

手く切って得られる関数 $f(x)$ を**分岐**と呼び、値を**主値**と呼びます。$\sin^{-1}(x)$ の主値などは、わかりやすく $\mathrm{Sin}^{-1}(x)$ のように書くのが慣例になっています。[*4]

周期関数の逆関数は確実に多価関数となるので、あらかじめ元の関数の周期を調べ、その周期の区間で枝を切れば上手くいきます。

例題　実関数 $\cos x$ の逆関数 $\cos^{-1} x$ の主値はどのように求めればよいか。

解答　$\cos x$ の周期は 2π なので、例えば $0 \leq \cos^{-1}(x) < 2\pi$ のように切れば上手くいきます。■

複素逆三角関数を考えようとすると対数関数が現れるので、逆三角関数についての記述はひとまずここまでとします。

10.4.3　多価関数、対数関数

複素指数関数 e^z の逆関数として複素対数関数 $\log z$ を考えます。e^z は周期 $2\pi i$ の周期関数なので複素対数関数 $\log z$ もやはり多価関数になります。

$$z = e^w$$

を満たす w が対数関数になるので、ここから w を求めます。まず $w = u + iv$、$z = re^{i\theta}(u, v$ は実数関数) とおくと、$z = e^{u+vi} = e^u e^{iv}$、$z = re^{i\theta}$ となるので、

$$e^u = r,\ e^{iv} = e^{i\theta}$$

と書けます。ここで $iv = i\theta$ とは限らないことに注意しましょう。指数関数は周期 $2\pi i$ を持つので $iv = i\theta + 2\pi in$　(n は整数) とすべきです。また、$e^u = r$ は両辺ともに実数なので素朴に対数を取って $u = \log r$ と書け、これらをまとめると対数関数は次のように書けることがわかります。

$$w = u + vi = \log r + i\theta + 2\pi in \quad (n \in \mathbf{Z})$$

ここで複素平面の項で述べたように r は z の絶対値を表し、偏角 θ は $\mathrm{Arg}(z)$ とも書けるので、w を z の関数として表すために次のように書き換えましょう。

$$w = \log|z| + i\mathrm{Arg}(z) + 2\pi in \quad (n \in \mathbf{Z})$$

w は多価関数であり、$2\pi ni$ だけ不定なので、$n = 0$ として固定すれば (**切れば**) 1 価関数のように振舞わせることができます。このようにした主値を $\mathrm{Log}(z)$ と書き、

$$\mathrm{Log} z = \log|z| + i\mathrm{Arg}(z)$$

とします。[*5] ここで、実関数のときと違って、主値に固定していても

$$\mathrm{Log}(\alpha) + \mathrm{Log}(\beta) = \mathrm{Log}(\alpha\beta) + 2\pi Ni \quad (N \in \mathbf{Z})$$

*4 sin →arcsin, Sin^{-1} →Arcsin　として表す教科書もあります。

*5 さらに簡略化して log → ln、Log→Ln と書いても良いです。

となる N が存在する (任意ではない) ことに注意しましょう。*6

例題 次の方程式の根を一つ求めよ。

$$\sin z = \sqrt{2}$$

解答 複素三角関数の定義を思い出しましょう。$\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ なので与式より

$$e^{2iz} - 2\sqrt{2}ie^{iz} - 1 = 0$$

と書け、2 次方程式の要領で

$$e^{iz} = \frac{2\sqrt{2}i \pm \sqrt{-4}}{2} = \sqrt{2}i \pm i = (\sqrt{2} \pm 1)i$$

が与えられます。$i = e^{\frac{\pi}{2}i}$ により i の偏角は $\pi i/2$ なので、上式の対数を取って $iz = \log(\sqrt{2} \pm 1) + \dfrac{\pi i}{2} + 2N\pi i$ となり、主値をとれば

$$z = \frac{\pi}{2} - i\log(\sqrt{2} \pm 1)$$

を得ます。■

例題 $\alpha = \beta = e^{i\pi}$ のとき、$\mathrm{Log}\alpha + \mathrm{Log}\beta$ を求めよ。

解答 $\mathrm{Log}e^{i\pi} = i\pi,\ \mathrm{Log}\alpha\beta = \mathrm{Log}e^{2\pi i} = \mathrm{Log}1 = 0$ より $N = 1$ です。こうして、

$$\mathrm{Log}\alpha + \mathrm{Log}\beta = \mathrm{Log}(\alpha\beta) + 2\pi i = 2\pi i$$

が得られます。■

10.4.4 多価関数、累乗根

ルート $\sqrt{\ }$ の拡張を考えます。これまでは「$x(>0)$ の平方根は $\pm\sqrt{x}$」と表現していましたが、複素数 z に対して、その平方根を 2 価の関数 $z^{1/2}$ と書くように約束するのです。これをさらに拡張して、(一般) 指数関数を次のように定めます。

一般指数関数

定義 10.5 一般指数関数 z^{α} を次のように定義する。

$$z^{\alpha} = e^{\alpha \log z} \quad (z \neq 0,\ \alpha \in \mathbf{R})$$

*6 これは偏角の変更によるもので、α か β の少なくとも一方が実数ならば $N = 0$ です。もう少し簡潔に書くなら

$$\mathrm{Log}\alpha + \mathrm{Log}\beta \equiv \mathrm{Log}\alpha\beta \mod (2\pi i)$$

とするべきでしょう。

例題 次の命題が成り立つことを示せ。
1 の N 乗根は N 個存在し、それらを $z_n = z_0, z_1, \cdots, z_{N-1}$ と書くと、これら $z_0, \cdots, z_{N-1}$ は複素平面上に「原点中心、および $z_0 = 1$ を通る正 N 角形」を構成する。

解答 $\log 1 = \log|1| + 0 \cdot i + 2\pi ni$ に気をつければ

$$1^{1/N} = \exp\left(\frac{1}{N}\log 1\right) = \exp\left(\frac{1}{N}(\log|1|+0\cdot i+2\pi ni)\right) = e^{\frac{2\pi n}{N}i} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots, N-1$$

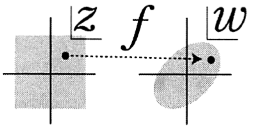
を得ることができ、証明できました。□

具体例を考えてみましょう。$N = 3$ とすれば

$$1^{1/3} = 1, e^{2\pi i/3}, e^{4\pi i/3}$$

と書くことができ、この三点は正三角形を描きます。

10.5 複素関数と等角写像*



ここでは 正則な関数 $w = f(z)$ を取り、z 平面の指定された領域から $f(z)$ によって w 平面のどんな領域に像がどのように写されるかを考えます。例えば $f(z) = z$ について考えると、z 平面にとった領域は w 平面の同じ領域に写されます。

例題 $w = f(z)$ に対し $f(z) = 1/z$ を取ると「z 平面内の単位円の内部は f によって w 平面内の単位円の外部へ写される」ことを示せ。

解答 $z = re^{i\theta}, w = u + vi$ とおき、$w = u + vi = \dfrac{e^{-i\theta}}{r} = \dfrac{\cos\theta}{r} - i\dfrac{\sin\theta}{r}$ とおくと (u, v) の描く図形は半径 $1/r$ の円領域（単位円の外部）に写されることがわかります。

例題 $w = z^{-1}(1 + az)^2$ によって $|z| \leq 1$ はどのような領域に写されるか。ただし $a < 1$ とする。

解答 $w = u + vi$ とおいて実部と虚部に分けます。$z = re^{i\theta}$ とおくと、

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{z} + 2a + a^2 z = r^{-1}e^{-i\theta} + 2a + a^2 re^{i\theta} \\ &= \left\{\left(\frac{1}{r} + a^2 r\right)\cos\theta + 2a\right\} + i\left\{\left(a^2 r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta\right\} \end{aligned}$$

となり、$u = \left(\dfrac{1}{r} + a^2 r\right)\cos\theta + 2a, v = \left(a^2 r - \dfrac{1}{r}\right)\sin\theta$ とおけば

$$\frac{(u-2a)^2}{\left(\dfrac{1+a^2r^2}{r}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(\dfrac{a^2r^2-1}{r}\right)^2} = 1$$

となり、$u = 2a, v = 0$ を中心とし、長軸半径 $\dfrac{1 + a^2r^2}{r}$、短軸半径 $\dfrac{1 - a^2r^2}{r}$ の楕円の内部になることがわかります。ここで $0 < r \leq 1$ です。■

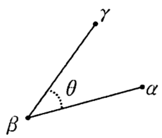
複素写像によって領域から領域へ像が写される様子を確かめる際、z の点がどのように動いたとき、w 平面に写される点がどのように変わるかというのは非常に気になる話題です。これを「角度」の変化に注目して考えてみます。まずは次の主張を準備しておきましょう。

複素数と角度

定理 10.3 複素平面上の複素数 α, β, γ（それぞれ相異なる点）を xy 平面上の点 A, B, C に対応させる。ここで角度 $\angle\alpha\beta\gamma = \angle ABC$ は次のように表される。

$$\angle\alpha\beta\gamma = \mathrm{Arg}\left(\frac{\gamma - \beta}{\alpha - \beta}\right)$$

図のように θ を取ると、ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ に対応する複素数 $\alpha - \beta$ と、ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ に対応する複素数 $\gamma - \beta$ に対し、$\gamma - \beta$ は $\alpha - \beta$ を縮めて（あるいは延ばして）角度 θ だけ回転させたものと見ることができ、正の実数 r に対して $\gamma - \beta = re^{i\theta}(\alpha - \beta)$ と書くことができます。これにより主張が得られます。□



本丸は次の主張です。正則関数が等角写像と呼ばれるゆえんがまさにこれです。

正則写像の等角性

定理 10.4 複素数 z_0 に対し $f'(z_0) \neq 0$ とし、$f(z)$ は正則とする。z 平面上の複素数 z_0, z_1, z_2 に対し w 平面上の点 $w_0 = f(z_0), w_1 = f(z_1), w_2 = f(z_2)$ を対応させるとき、次が成り立つ。

$$\lim_{z_1, z_2 \to z_0} \Big(\angle z_1 z_0 z_2 - \angle w_1 w_0 w_2\Big) = 0$$

$$\frac{w_2 - w_0}{w_1 - w_0} = \frac{f(z_2) - f(z_0)}{f(z_1) - f(z_0)} = \frac{\dfrac{f(z_2) - f(z_0)}{z_2 - z_0}}{\dfrac{f(z_1) - f(z_0)}{z_1 - z_0}} \times \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}$$

$$\Rightarrow \angle w_1 w_0 w_2 = \mathrm{Arg}\left(\frac{\frac{f(z_2) - f(z_0)}{z_2 - z_0}}{\frac{f(z_1) - f(z_0)}{z_1 - z_0}}\right) + \angle z_1 z_0 z_2 \quad (\because \mathrm{Arg}(e^{i\theta}e^{i\phi}) = \theta + \phi)$$

により、両辺で $z_1, z_2 \to z_0$ とすると $\displaystyle\lim_{z_1, z_2 \to z_0} \frac{\frac{f(z_2) - f(z_0)}{z_2 - z_0}}{\frac{f(z_1) - f(z_0)}{z_1 - z_0}} = \frac{f'(z_0)}{f'(z_0)} = 1$ により求めるべき主張を得ます。□

ネーミング通り、等角写像とは z が原点のまわりを回る時、複素写像 $w = f(z)$ で w 平面に写される点もまた、同じような回り方をする、という性質を言い表しているわけです。

10.6　演習問題

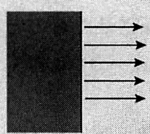
$z = z_0 + re^{i\theta}$ に対し $re^{i\theta}$ が一周した際に $f(z)$ の偏角が一周**しない**とき、$z = z_0$ は**分岐点**と呼ばれます。

1　以下の各問に答えよ。

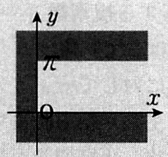
(1)　$f(z) = \arcsin z$ の主値を取れ。

(2)　$f(z) = z^{1/2}$ についてについて枝を切り（リーマン面を切断し)、主値を取れ。

2　図（左）は灰色の導体と、その表面から現れる電気力線（矢印）を示している。様々な形の導体表面から出る電気力線を描くために、等角写像が役に立つことがある。以下の各問に答えよ。ただし導体外に電荷はないとし、静電ポテンシャル $\phi(x,y)$ はラプラス方程式 $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\phi(x,y) = 0$ をみたしており、ϕ(導体表面) $= 0$ とする。



導体表面と電気力線



(3) の図

(1)　正則な複素関数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ に対し、u, v が 2 次元のラプラス方程式をみたす調和関数となることを示せ。

(2)　xy 平面上の点 $(a, 0)$（a は正の実数）を中心とする半径 R の円内部を導体が占めているとする。導体外での静電ポテンシャル $\phi(x,y)$ を求め、電気力線を描け。

(3)　図（右）のように $y \leq 0, y \geq \pi, x \leq 0$ の領域を導体が占めているとする。導体表面を直線に写す写像 $w = a\cosh z$（$a > 0$）を用い、導体外での電気力線を描け。

解答

1　z^α の関数について枝を切ることを、リーマン面を切るとも言います。

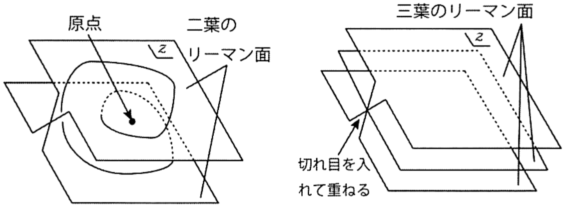
(1)　$z = \sin f = \dfrac{e^{fi} - e^{-fi}}{2i}$ であり、$w = e^{fi}$ とおくと二次方程式 $w^2 - 2izw - 1 = 0$ が得られます。これを解くと $w = e^{fi} = iz \pm \sqrt{1 - z^2}$ が得られ、対数を取って

$$f(z) = -i \ln i(z \pm \sqrt{z^2 - 1}) = -i \ln(z \pm \sqrt{z^2 - 1}) + (2n\pi + \frac{\pi}{2}),\ n \text{ は整数}$$

となり、$n = 0$ として主値を取ると $f(z) = -i\ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) + \dfrac{\pi}{2}$ を得ます。[*7]

[*7] 複号はどちらをとっても同じ結果になります。

(2) 例えば $z = r^{i\theta}$ の偏角 θ が 0 から 2π まで一周すると、z^2 の偏角は一周しますが、$f(z) = z^{1/2}$ の偏角は半周しかしません。z の偏角が一周しても、複素関数 $f(z)$ の偏角が一周しない場合、原点が特異点となります（これを分岐点と呼びます）。つまり $f(z) = z^{1/2}$ の場合は原点 $z = 0$ が分岐点（特異点の一種）となります。逆に言えば、$f(z)$ の偏角が一周するためには、z が二周する必要があります。この「z が n 周すれば $f(z)$ が一周」というのを、n 枚（n 葉）のリーマン面で表し、図（左）のように描くことがあります。



この図（左）は、2 枚の複素平面があり、z が上の面で一周すると下の面にうつり、下の面で一周すると上の面に戻る、という意味を表しています。上の面 $0 \leq \theta < 2\pi$ と下の面 $2\pi \leq \theta < 4\pi$ でそれぞれ $z = re^{i\theta}$ に対し

$$z^{1/2} = \begin{cases} \sqrt{r}e^{\frac{i\theta}{2}} & \text{上面 } (0 \leq \theta < 2\pi) \\ \sqrt{r}e^{\frac{i\theta}{2}} & \text{下面 } (2\pi \leq \theta < 4\pi) \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{r}e^{\frac{i\theta}{2}} & \text{上面 } (0 \leq \theta < 2\pi) \\ -\sqrt{r}e^{\frac{i\theta}{2}} & \text{下面 } (0 \leq \theta < 2\pi) \end{cases}$$

で与えられます。どちらでも良いですが、ここでは上面だけを残して、下面を取り除き、定義域を $0 \leq \mathrm{Arg} < 2\pi$ として枝を切れば主値が得られます。[*8]

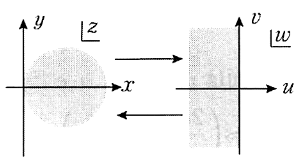
2

(1) コーシー・リーマンの関係式より

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\underline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)} + \frac{\partial}{\partial y}\underline{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)} = \frac{\partial}{\partial x}\underline{\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)} + \frac{\partial}{\partial y}\underline{\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)} = 0$$

となって u が調和関数であることが示せます。v も同様です。

(2) 図のように、与えられた導体の形を平面 $x < 0$ に写す写像を考えてみましょう。



つまり、w 平面で描いた電気力線が z 平面でどのような形をしているか考えるわけです。$z = e^w$ とすると、w 平面上の $w = 0 + vi$、すなわち直線 $u = 0$

*8 例えば $z^{1/3}$ に対するリーマン面は図（右）のようになります。また、$\ln z$ は何周しても元に戻らないため、∞ 葉のリーマン面を用いて表す必要があります。そこで、複数のリーマン面の中から、ひとつの複素平面を残して取り除くことを**リーマン面を切断する（枝を切る）**と言うわけです。

は、$z = e^{vi}$ すなわち単位円の表面に写されます。これより、図の w 平面上の直線 $u = 0$ は、$z = Re^w + a$ によって導体表面に写されることがわかります。これより（対数関数の主値を取って）

$$w = u + vi = \ln\left(\frac{z-a}{R}\right) = \ln\frac{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}{R} + i\mathrm{Arg}z$$

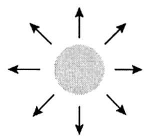
となります。この実部を取って、

$$\phi(x,y) = u(x,y) = \ln\frac{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}{R}$$

を得ます。これが求めるべきポテンシャルとなります。さらに、等ポテンシャル面の式 $\phi(x,y) = c$（定数）に対し、x と y は $(x-a)^2 + y^2 = (Re^c)^2$ をみたし、$v = \mathrm{Arg}z$ より、

$$y = \tan\left[(\mathrm{Arg}z)(x-a)\right]$$

となり、図のように、導体表面から垂直な電気力線が現れることがわかりますね。



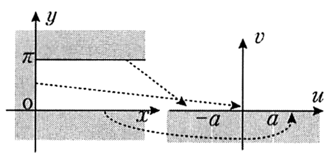
(3)　$w = a\cosh z = \dfrac{a}{2}(e^x + e^{-x})\cos y + i\dfrac{a}{2}(e^x - e^{-x})\sin y$ に導体表面の式をそれぞれ代入すると、

(a)　$x = 0, 0 \le y \le \pi$ のとき、$u = a\cos y \, (-a \le u \le a),\ v = 0$

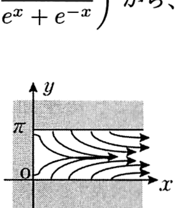
(b)　$x \ge 0, y = 0$ のとき、$u = \dfrac{a}{2}(e^x + e^{-x}) \, (u \le a),\ v = 0$

(c)　$x \ge 0, y = \pi$ のとき、$u = -\dfrac{a}{2}(e^x + e^{-x}) \, (u \le a),\ v = 0$

となり、図のようにうつされることがわかります。



結局、等ポテンシャル面は $u = \dfrac{a}{2}(e^x + e^{-x})\cos y = \alpha$（一定）で与えられることになり、$y = \mathrm{Arccos}\left(\dfrac{2\alpha}{a}\dfrac{1}{e^x + e^{-x}}\right)$ から、図のような電気力線が現れることがわかります。



第 11 章

複素積分

本節の目標は**留数定理**の証明です。複素関数の線積分、コーシーの積分定理、コーシーの積分公式、特異点、ローラン展開、留数 (Residue) などを準備した上で、留数定理に至ります。留数定理は、通常の積分技巧では求められない積分を系統的に計算するために必要な武器であり、非常に重要です。実関数の積分に応用するのは次の章に譲り、留数定理へのシナリオを追いかけていきましょう。

11.1　複素関数の積分

以下では断りのない場合複素関数 $f(z)$ を一価で正則な、すなわち任意の点のまわりにテイラー展開可能な関数とします。z で微分すると $f(z)$ になる複素関数 $F(z)$ について、次が成立します。

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1) \tag{11.1}$$

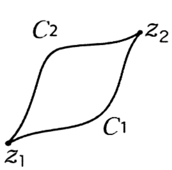
z_1, z_2 が複素数であることに注意しましょう。実関数での積分と非常に似た性質です。

例題　次の積分を求めよ。

$$\int_0^{1+i} zdz$$

解答　$\displaystyle\int_0^{1+i} zdz = \left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^{1+i} = \frac{1}{2}(1+i)^2 = i$ となります。■

11.2　複素線積分



正則な複素関数の微分は、極限の近づけ方によらず一定である、というのは前章で学びましたが、一方で複素関数の定積分を行う際、z_1 から z_2 へ変化する複素変数 z の経路は図のように複数取ることができ、例えばスタートとゴールの一致する２つの経

路 C_1, C_2 について

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

と書くことはできるのでしょうか。先の定積分の定め方からすれば当然これは成り立つべきです。線積分の、これからも用いられる主な経路の取り方については「円弧」「線分」の２種類ありますが、練習も含めて次の問題を見てみましょう。

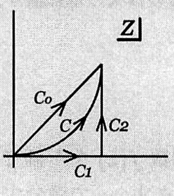
例題　以下のそれぞれの経路にしたがって次の複素線積分を計算せよ。

$$\int_0^{1+i} zdz$$

(1)　$C_0 : y = x$ に沿って 0 から $1+i$ まで

(2)　$C_1 : x$ 軸に沿って 0 から 1 まで、さらに C_2 : (y 軸と平行な直線) に沿って 1 から $1+i$ まで

(3)　C :(0 と $2i$ を直径とする半径 1 の円) に沿って 0 から $1+i$ まで



解答　どれも重要です。それぞれの線積分で行う変換のテクニックが後で役に立ちます。

(1)　線分 $y = x$ により $dy = dx$ なので、$dz = dx + idy = (1+i)dx$ のように書け、

$$\int_{C_0} zdz = \int_{C_0} (x+iy)(dx+idy) = \int_0^1 (x+ix)(dx+idx)$$
$$= \int_0^1 (1+i)^2 xdx = (1+i)^2 \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}(1+i)^2 = i$$

(2)　まず C_1 では $y = 0$ で一定なので $dy = 0$ であり、$dz = dx + 0i = dx$ です。

$$\int_{C_1} zdz = \int_{C_1} (x+0i)(dx+0i) = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2} \tag{11.2}$$

次に C_2 では $x = 1$ で $(y|0 \to 1)$ です。$z = x+yi = 1+iy$、$dz = 0+idy = idy$ に気をつけましょう。[*1]

$$\int_{C_2} zdz = \int_{C_2} (1+iy)(0+idy) = \int_0^1 (1+iy)idy = i - \frac{1}{2} \tag{11.3}$$

[*1] $z = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$ において $z = 1 + yi$ だから $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$

これで式 (11.2) と式 (11.3) を足して答えは $\underline{i\left(=\frac{1}{2}(1+i)^2\right)}$ となります。

(3) **点 α が中心である半径 r の円は $z-\alpha=re^{i\theta}$ とおきます。**[*2] C は i を中心とする半径 1 の円なので $z=i+e^{i\theta}$ と書けます。$\theta=-\frac{\pi}{2}$ から $\theta=0$ で切り取られる円弧が C なので、$\frac{dz}{d\theta}=ie^{i\theta}$ に気をつけて

$$\int_C zdz=(i+e^{i\theta})ie^{i\theta}d\theta=\int_{-\pi/2}^{0}(-e^{i\theta}+ie^{2i\theta})d\theta$$
$$=\left[-\frac{1}{i}e^{i\theta}+\frac{1}{2}e^{2i\theta}\right]_{-\pi/2}^{0}=\left(i+\frac{1}{2}\right)-\left(1+\frac{-1}{2}\right)=\underline{i\left(=\frac{1}{2}(1+i)^2\right)}$$

として答えが得られます。どの経路をとって積分しても同じ計算結果が得られることがわかります。

例題の計算を踏まえて、次の主張が得られます。$\oint_C$ は、ループ（一周する）曲線 C に対する積分であることを表し、**周回積分**と呼ばれます。

留数定理の元ネタ

定理 11.1 α を中心とし、半径 r の円に対して時計の反対周りにまわる曲線を C とすれば、

$$\oint_C (z-\alpha)^n dz=\begin{cases}2\pi i & n=-1\\ 0 & n\neq -1\end{cases}\qquad (n:\text{整数})\qquad(11.4)$$

が成立する。

周回積分の正方向は反時計回りとします。 $z-\alpha=re^{i\theta}$ とおくことで $(\theta|0\to 2\pi)$ で区間が決定できますから、$dz/d\theta=rie^{i\theta}$ に気をつけて

$$\oint_C (z-\alpha)^n dz=\int_0^{2\pi} r^n e^{in\theta} ire^{i\theta}d\theta=\int_0^{2\pi} r^{n+1}e^{i(n+1)\theta}d\theta$$
$$=\begin{cases}\int_0^{2\pi} ir^0e^0d\theta & n=-1\\ \left[\frac{r^{n+1}}{(n+1)i}e^{i(n+1)\theta}\right]_0^{2\pi} & n\neq -1\end{cases}=\begin{cases}2\pi i & n=-1\\ 0 & n\neq -1\end{cases}$$

より証明が完了します。□　この定理は留数定理の心臓部であり重要です。

[*2] 不慣れな人のためにあらためてそのような置き換えがなぜ有効か示しておきます。まず点 $\alpha=a+bi$ を中心とする円は xy 座標で言う (a,b) を中心とする円なので

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\quad(r\text{ は円の半径})$$

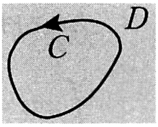
と書けます。ここで $\frac{x-a}{r}=\cos\theta$、$\frac{y-b}{r}=\sin\theta$ という置き換えにより、オイラーの公式を利用すれば

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta=\frac{1}{r}\Big[(x-a)+(y-b)i\Big]=\frac{1}{r}\Big[(x+yi)-(a+bi)\Big]=\frac{1}{r}(z-\alpha)$$

と書けるから $re^{i\theta}=z-\alpha$ となることがわかります。

11.3 コーシーの積分定理

どの経路を使っても積分すれば同じ値になるという結果を使います。C を端点 z_1 から z_2 に向かう曲線とし、$f(z)$ を領域 D で正則な関数とします。このとき式 (11.1)



$$\int_C f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$$

に対して $z_1 = z_2$ としてみると、右図のようなループ曲線 C に対する積分を実行していることになり、次の定理が成立します。

Cauchy（コーシー）の積分定理

定理 11.2 $f(z)$ を領域 D 内で 1 価かつ正則な関数とする。D 内の単純閉曲線 C において、次が成立する。

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

シンプルな定理ですが使いでがあります。次項でその応用を扱うとして、いくつか例題を見てみましょう。

例題　以下それぞれについて、周回積分を求めよ。

(1)　$\oint_C \sin z dz$(C:原点のまわりを時計と反対にまわる半径 1 の円を一周)

(2)　$\oint_C \frac{1}{z^n} dz$(n:自然数,C:原点のまわりを時計と反対にまわる半径 1 の円を一周)

解答　留数定理の元ネタとコーシーの積分定理を使い分けます。

(1)　$\sin z$ はどの z でも正則なのでコーシーの積分定理より $\int_C \sin z dz = 0$ です。

(2)　これはコーシーの積分定理が使えません。なぜかというと、C 内部の原点で $\frac{1}{z}$ が正則でないためです。$f(z)$ が $z = \alpha$ で発散してしまうとき、$f(z)$ は $z = \alpha$ で正則ではないことに注意しましょう。[*3] **しかし式 (11.4) を使うと求めることができます。**

$$\oint_C \frac{1}{z^n} dz = \begin{cases} 2\pi i & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$$

正則性が崩れるのは $f(z)$ の微分が発散してしまうときですが、例えば $z^{-1}, \sqrt{z}, \log z$ の導関数はすべて $z = 0$ で発散します。このような点は**特異点**と呼ばれ、これらの関数に対しすべて $z = 0$ は特異点です。

[*3] 正確には $f'(\alpha)$ が発散してしまうときに正則でなくなってしまいます。

11.4 特異点とローラン展開

前項での例 (2) に見たように、$1/z$ は原点で発散してしまい、正則とはいえません。ここで特異点について述べておきましょう。特異点の一般論については差し控えますが、あらためて $f(z)$ が $z=\alpha$ において正則でなくなるとき、α を**特異点**と呼びます。

特に $f(z)$ が自然数 n、複素定数 α に対し $f(z)=(z-\alpha)^{-n}$ で与えられたとき、α をn **位の極**(あるいは単に**極**) と言い、特異点の一つとして考えることができます。**これ以降、コーシーの積分定理と魂を同じくし、単純閉曲線に沿った周回積分に絞って複素積分を考えていくことにします。**式 (11.4) を有効利用することを考えると、積分の対象になる関数が $(z-\alpha)^n$ の和で書けた方がよさそうです。そこで次のように $f(z)$ を展開しましょう。

Laurent(ローラン)展開

定義 11.1 $f(z)$ が α に対し次のように展開できたとき、**ローラン展開**と呼ぶ。

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-\alpha)^n \\
&= \left(c_0 + c_1(z-\alpha) + c_2(z-\alpha)^2 + \cdots\right) + \left[\frac{c_{-1}}{z-\alpha} + \frac{c_{-2}}{(z-\alpha)^2} + \cdots\right]
\end{aligned}
$$

ここで $(\cdots)$ を正則部、$[\cdots]$ を**主要部**と呼び、このような展開を ($z=\alpha$ のまわりの) ローラン展開と呼びます。α が $f(z)$ の特異点でなければ $[\cdots]=0$ となり、テイラー展開となります。一般的に任意の複素関数 $f(z)$ がローラン展開できる保障はありませんが、$\lim_{z\to\alpha} f(z)(z-\alpha)^n =$ (0 でない有限な値) となる n を見つけて $f(z)(z-\alpha)^n$ をテイラー展開し、両辺を $(z-\alpha)^n$ で割ればローラン展開を得ることができます。[*4] これを逆用して得られる便利な主張をおさえておきます。

極の判別法

定理 11.3 $f(z)$ が α を n 位の極に持つ必要十分条件は次が成立することである。

$$
\lim_{z\to\alpha} f(z)(z-\alpha)^n = (0\text{ でない有限な値}) \tag{11.5}
$$

実際にいくつかの複素関数をローラン展開してみましょう。

例題 以下それぞれに答えよ。

[*4] もちろん例外があります。$n\to\infty$ のとき、同じ手法でローラン展開するのは不可能ですが、実際にはローラン展開が存在し、それも証明可能です。詳しくは真性特異点について複素関数論の本を当たってください。ここでは証明を割愛します。

(1)　$g(z) = \dfrac{1}{\sin z}$ について、$|z| < 1$ とする。$g(z)$ は何位の極を持つか。
(2)　$g(z)$ を原点のまわりに 3 次までローラン展開せよ。

解答

(1)　$z \sim 0$ で $\dfrac{1}{\sin z} \sim \dfrac{1}{z}$ と書けるから、$g(z)$ は 1 位の極 $z = 0$ を持つと予想できます。先ほどの定理と極限公式 $(\lim_{z \to 0} \dfrac{z}{\sin z} = 1)$ を併せれば、やはり 1 位の極を持つとわかります。

(2)

$$g(z) = \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$$

と書けます。一方、マクローリン展開により $\sin z = z - \dfrac{1}{3!}z^3 + \dfrac{1}{5!}z^5 - \cdots$ となりますから、

$$\begin{aligned} 1 = g(z)\sin z &= \left(\frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots\right)\left(z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \cdots\right) \\ &= c_{-1} + c_0 z + (\tfrac{-1}{3!}c_{-1} + c_1)z^2 + (\tfrac{-1}{3!}c_0 + c_2)z^3 + (\tfrac{c_{-1}}{5!} + \tfrac{-1}{3!}c_1 + c_3) + \cdots \end{aligned}$$

と書け、任意の z でこの等式が成り立っていることを考えれば

$$c_{-1} = 1,\ c_0 = 0,\ \tfrac{-1}{3!}c_{-1} + c_1 = 0,\ \tfrac{-1}{3!}c_0 + c_2 = 0,\ \tfrac{c_{-1}}{5!} + \tfrac{-1}{3!}c_1 + c_3 = 0$$

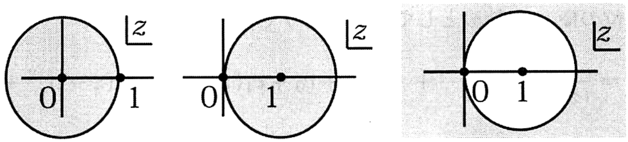
が成り立ち、$c_{-1} = 1,\ c_0 = 0,\ c_1 = \dfrac{1}{6},\ c_3 = \dfrac{7}{300}$ がわかります。これで $\dfrac{1}{\sin z} = \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{6}z + \dfrac{7}{300}z^3 + \cdots$ と展開できます。■

ここでローラン展開の収束性について注意しておきましょう。ローラン展開を実際に行うためにテイラー展開の結果を流用することが多く、当然テイラー展開そのものが収束していなければ使い物になりません。テイラー展開の収束性から、必要に応じて場合分けを使っていきましょう。

例題　$f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ を次の領域に対してローラン展開せよ。

(1)　$|z| < 1$
(2)　$|z - 1| < 1$
(3)　$|z - 1| > 1$

解答　ちょっとややこしい問題ですが解きほぐしてみましょう。特異点は $z = 0, 1$ の 2 つです。ここではマクローリン展開の式 $(\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n)$ を使います。図のように収束円を並べ、左から順に灰色の領域でローラン展開します。



(1)　$|z| < 1$ のときを考えます。$\dfrac{1}{z(z-1)} = \dfrac{-1}{z}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ となって $z=0$ のまわりでローラン展開できました。

(2)　$|z-1| < 1$ のときを考えます。$\dfrac{1}{z(z-1)} = \dfrac{1}{z-1} \times \dfrac{1}{1-(1-z)} = \dfrac{1}{z-1}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(1-z)^n$ となって $z=1$ のまわりでローラン展開できました。

(3)　$|z-1| > 1$ のときを考えます。$\dfrac{1}{z(z-1)} = \dfrac{1}{(z-1)^2} \times \dfrac{1}{1+\frac{1}{z-1}} = \dfrac{1}{(z-1)^2}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{(z-1)^n}$ となってローラン展開できました。■

極のまわりにローラン展開する場合は、先の例題 (1)(2) のように収束円内で展開する形になりますが、例題 (3) のように特異点を中心とする円の外側でローラン展開する場合は負べきが無限に続くようになります。[*5]

$e^{1/z}$ を $z=0$ のまわりにローラン展開せよ。

指数関数のマクローリン展開 $e^z = 1 + z + \dfrac{1}{2!}z^2 + \cdots$ において $z \to 1/z$ として $e^{1/z} = 1 + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{2!}\dfrac{1}{z^2} + \cdots$ を得ます。■

このように $z=0$ のまわりに展開したときに負べきが永遠に続くとき、このような特異点 $z=0$ を**真性特異点**と呼びます。[*6] 先の例題 (3) の $z=1$ と混同しそうですが、$e^{1/z}$ はあくまで $z=0$ のまわりでローラン展開していることに注意しましょう。

11.5　留数の定義とその導出法

最後の準備をします。

留数の定義

定義 11.2 $f(z)$ を特異点 α のまわりでローラン展開したときの c_{-1} を留数と言い、$\mathrm{Res}(\alpha)$ とも書く。

*5　これは $\zeta = \dfrac{1}{z-1}$ とおくことで $\zeta = 0$ のまわりにローラン展開、すなわち $z = \infty$ のまわりでローラン展開していることになるわけです。

*6　本来、真性特異点の性質は「$f(z)$ が $z \to \alpha$ で有限または無限の極限値を持たないとき、α を**真性特異点**と呼ぶ」というものです。例えば $e^{1/z}$ は $z \to +0$ で ∞ に、$z \to -0$ で 0 になるため $z=0$ で極限値が一意に決まりません。

$f(z)$ が n 位の極 α を持つとして、その周りでローラン展開して

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-\alpha)^n} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-\alpha} + c_0 + c_1(z-\alpha) + c_2(z-\alpha)^2 + \cdots$$

としてからうまく c_{-1} を求めましょう。正則部は $z=\alpha$ を代入すれば消せるので、問題は主要部ということになりますが、これは両辺に $(z-\alpha)^n$ を掛けて

$$(z-\alpha)^n f(z) = c_{-n} + c_{-n+1}(z-\alpha) + \cdots + c_{-1}(z-\alpha)^{n-1} + c_0(z-\alpha)^n + c_1(z-\alpha)^{n+1} + \cdots$$

とし、$(n-1)$ 階微分して

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\{(z-\alpha)^n f(z)\} = (n-1)!c_{-1} + c_0\frac{n!}{1!}(z-\alpha) + c_1\frac{(n+1)!}{2!}(z-\alpha)^2 + \cdots$$

の両辺で $z \to \alpha$ とすれば c_{-1} 以外が消え、これで以下の定理を得られます。

Goursat（グルサ）の公式

定理 11.4 $f(z)$ が n 位の極 α を持つならば、留数 $\mathrm{Res}(\alpha)$ は

$$\mathrm{Res}(\alpha) = \lim_{z\to\alpha}\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\Big((z-\alpha)^n f(z)\Big) \tag{11.6}$$

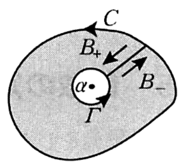
で与えられる。

また、$f(z)$ が 1 位の極 α を持ち、$f(z) = p(z)/q(z)$ と書けるとき、

$$\mathrm{Res}(\alpha) = \frac{p(\alpha)}{q'(\alpha)} \tag{11.7}$$

と表すことができます。これは式 (11.6) とロピタルの定理を使って示せます。[*7]

11.6　留数定理の証明



コーシーの積分定理を利用して次のように考えます。$f(z)$ が右図の灰色部で正則であるとすると、C の内部で Γ の外部が正則領域ですからコーシーの積分定理より $\int_{C+(+B)+\Gamma+(-B)} f(z)dz = 0$ であり、$\int_C f(z)dz = -\int_\Gamma f(z)dz$ が成立します。ここで Γ を $f(z)$ の特異点 α のまわりを**時計回り**に廻る半径 r の円形経路とし、C を**反時計回り**に廻り、Γ を囲む**任意の閉路**とします。すると、C を (Γ を囲むとして) 任意に選んでも、結局は Γ で線積分を取ることに帰結されますから、Γ の反対周りを $-\Gamma$ で表し、$f(z)$ のローラン展開を

---

*7 $\displaystyle \mathrm{Res}(\alpha) = \lim_{z\to\alpha}\frac{p(z)(z-\alpha)}{q(z)} = \lim_{z\to\alpha}\frac{\frac{d}{dz}\big(p(z)(z-\alpha)\big)}{\frac{d}{dz}q(z)} = \lim_{z\to\alpha}\frac{p'(z)(z-\alpha)+p(z)}{q'(z)} = \frac{p(\alpha)}{q'(\alpha)}$

より示せます。

利用して

$$\oint_C f(z)dz = -\oint_\Gamma f(z)dz = \oint_{-\Gamma} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-\alpha)^n dz$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \oint_{-\Gamma} (z-\alpha)^n dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \begin{cases} 2\pi i & n=-1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases} \quad (\because \text{式 } (11.4))$$

$$= 2\pi i c_{-1} = 2\pi i \mathrm{Res}(\alpha)$$

と変形することができます。これをまとめれば次の定理、すなわち留数定理 (β 版) が得られます。

留数定理 β 版

定理 11.5 反時計回りの閉路 C 内に特異点 α があるとき、次の関係が成立する。

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \mathrm{Res}(\alpha)$$

C 内に複数特異点がある場合は、それぞれ足し合わせれば次の定理が完成します。

留数定理

定理 11.6 反時計回りに廻る任意の閉曲線 C 内に $f(z)$ の特異点 $\alpha_1, \cdots, \alpha_N$ があるとき、次が成立する。

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}(\alpha_k)$$

11.7　留数定理を使ってみよう

留数定理を使うために次の段階で考えます。

戦略：留数定理の使い方

ステップ 1.　求める積分が複素周回積分の形であることを確認する

ステップ 2.　**積分経路の中に**被積分関数 $f(z)$ の特異点 (**極**または**真性特異点**) があるか調べる。**極があれば何位であるかも調べる**(→ 式 (11.5))

ステップ 3.　次の 3 つのケースが考えられます。

- **特異点がないとき**　コーシーの積分定理より、答えは 0
- n **位の極があるとき**　式 (11.6) により留数を求める。(1 位のときは式 (11.7) でもよい)
- **真性特異点があるとき**　ローラン展開して a_{-1}(留数) を求める。

ステップ 4.　留数 $\mathrm{Res}(\alpha) = a_{-1}$ が求められたら、答えは $2\pi i a_{-1}$

例題　以下の積分を計算せよ。

(1)　$\displaystyle\oint_C \frac{\sin z}{z}dz \quad C:|z|=1$ を正方向に一周

(2)　$\displaystyle\oint_C \frac{e^z}{z}dz \quad C:|z|=1$ を正方向に一周

(3)　$\displaystyle\oint_C \frac{1}{z(e^z-1)}dz \quad C:|z|=2$ を負方向に一周

(4)　$\displaystyle\oint_C e^{1/z}dz \quad C:|z|=1$ を正方向に一周

解答

(1)　見かけは $z=0$ が特異点のようですが、$z=0$ で $\dfrac{\sin z}{z}$ は発散しません。つまりこの関数は特異点を持たず、コーシーの積分定理より $\displaystyle\int_C \frac{\sin z}{z}dz = 0$ が成り立ちます。別の見方をすれば、ローラン展開して $\dfrac{\sin z}{z} = 1 - \dfrac{1}{3!}z^2 + \dfrac{1}{5!}z^4 - \cdots$ となり $a_{-1}=0$ であるから、留数定理より $\displaystyle\int_C \frac{\sin z}{z}dz = 2\pi i a_{-1} = 0$ としても良いでしょう。

(2)　$\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{e^z}{z}$ が発散するので $z=0$ は特異点です。また、$\displaystyle\lim_{z\to 0} z\frac{e^z}{z} = e^0 \neq 0$ かつ有限となり、$\dfrac{e^z}{z}$ は 1 位の極 $z=0$ を持つことがわかります。

留数 Res(0) は式 (11.7) により $\displaystyle\mathrm{Res}(0) = \lim_{z\to 0}\frac{e^z}{z'} = e^0 = 1$ なので答えは $2\pi i$ です。

(3)　$z = 0, 2\pi i, 4\pi i, \cdots$ が特異点ですが、積分経路の中にあるのは $z=0$ だけです。$z=0$ は $\displaystyle\lim_{z\to 0} z^2\frac{1}{z(e^z-1)} = \lim_{z\to 0}\frac{z}{e^z-1} = 1 \neq 0$ かつ有限より[*8] 2 位の極であることがわかります。式 (11.6) を用いて留数を求めると、

$$\mathrm{Res}(0) = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(z^2\frac{1}{z(e^z-1)}\right) = \lim_{z\to 0}\frac{(e^z-1)-ze^z}{(e^z-1)^2} \tag{11.8}$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{(-z)e^z}{2e^z(e^z-1)} \tag{11.9}$$

$$= \frac{-1}{2}$$

ただし式 (11.8) から式 (11.9) でロピタルの定理を使っています。最後に問題文をよく見てください。**経路は負方向 (時計回り) となっています**から、答えは $2\pi i\mathrm{Res}(0)$ ではなく、反対方向を加味した (-1 倍した) $-2\pi i\mathrm{Res}(0)$ となります。これにより、答えは $-2\pi i\mathrm{Res}(0) = \pi i$ となります。

(4)　ローラン展開してみると $e^{1/z} = 1 + \dfrac{1}{1!z} + \dfrac{1}{2!z^2} + \dfrac{1}{3!z^3} + \cdots$ となり、$z=0$ が真性特異点になります。この場合式 (11.6) や式 (11.7) は使えませんから、

*8 ロピタルの定理で求められます。

直接 $\frac{1}{z}$ の係数を探します。展開式より $\frac{1}{z}$ の係数 a_{-1} は 1 であるため、答えは $2\pi i a_{-1} = 2\pi i$ とわかります。

11.8 演習問題

1 $\dfrac{z}{e^z-1}$ のテイラー展開を $\dfrac{z}{e^z-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k$ とおく。このとき、展開係数 B_n が漸化式 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0$ をみたすことを示せ。ただし $n > 1$ とする。

2 エルミート多項式 $H_n(z)$ を $H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \dfrac{d^n}{dz^n} e^{-z^2}$ で定める。これを用いて次のエルミート多項式の母関数展開式を示せ。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(z)}{n!} t^n = e^{-t^2+2zt}$$

3 $f(z) = \frac{\pi}{z^2+a^2} \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$ 、$a > 0$ とする。以下の各問に答えよ。

(1) $f(z)$ の極と留数をすべて求めよ。

(2) Γ を 4 点 $A: -R+Ri, B: -R-Ri, C: R-Ri, D: R+Ri$（$R$ は正の半整数）を頂点とする正方形の周として、z が AB または DA 上にあるとき $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} |zf(z)| = 0$ が成り立つことを示せ。

(3) $\displaystyle\oint_\Gamma f(z)dz$ を考えることで、$R \to \infty$ に対して次が成り立つことを示せ。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi \cosh(\pi a)}{2a \sinh(\pi a)} - \frac{1}{2a^2}$$

(4) $a \to 0$ として $\zeta(2)$ を求めよ。

解答

1 マクローリン展開 $e^z - 1 = \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} z^m$ を用いると $z = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_k}{m!k!} z^{k+m}$ となり、$n = k+m$ とおくと、$n = 0 \to \infty, k = 0 \to n-1$ で和を取りなおして $z = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k$ とし、係数比較して求めるべき結果を得ます。

2 正則関数 $f(z)$ と点 z のまわりを一周する大きな円 C に対してグルサの公式 $\dfrac{d^n f(z)}{dz^n} = \dfrac{n!}{2\pi i} \displaystyle\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$ を用います。[*9] $f(z) = e^{-z^2}$ とおくと $\dfrac{d^n}{dz^n} e^{-z^2} = \dfrac{n!}{2\pi i} \displaystyle\oint_C \frac{e^{-\zeta^2}}{(\zeta-z)^{n+1}} d\zeta$ となり、左から e^{z^2} を掛けて $H_n(z) =$

[*9] $f(\zeta) \to f(\zeta)(\zeta - z)^n$ とおけばグルサの公式になりますね。

$e^{z^2}\dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\oint_C \frac{e^{-\zeta^2}}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta$ とします。母関数展開を得るために $\dfrac{t^n}{n!}$ を掛けて和を取りましょう。

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(z)t^n}{n!} = \frac{e^{z^2}}{2\pi i}\oint_C d\zeta \frac{e^{-\zeta^2}}{\zeta - z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{\zeta - z}\right)^n = \frac{e^{z^2}}{2\pi i}\oint_C d\zeta \frac{e^{-\zeta^2}}{\zeta - z - t}$$
$$= \frac{e^{z^2}}{2\pi i}\oint_C d\zeta \frac{e^{-\zeta^2}}{\zeta - z - t} = e^{z^2}e^{-(z+t)^2} = e^{-t^2-2zt}$$

途中で等比級数の和の公式と留数定理を用いました。

3

(1)　任意の整数 n に対し $z = n$ が一位の極であり、留数は $\dfrac{1}{n^2+a^2}$ となります。一方 $z = \pm ia$ も一位の極で、留数は $\dfrac{\pi}{2ia}\dfrac{\cos\pi ia}{\sin\pi ia} = -\dfrac{\pi}{2a}\dfrac{\cosh(\pi a)}{\sinh(\pi a)}$ となります。

(2)　加法定理 $\cos(a+bi) = \cos a\cosh b - i\sin a\sinh b, \sin(a+bi) = \sin a\cosh b + i\cos a\sinh b$ を用います。R が半整数であることに注意して、$z \in AB$ のとき、すなわち $z = -R + yi$ と書けるとき、$\tanh(-\pi R + \pi yi) = i\tanh y$ と書けることから、

$$|f(z)| = \frac{\pi}{|(-R+yi)^2 + a^2|}|\tanh y| \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

となります。一方で $z \in DA$ において $z = x + Ri$ とおくと、

$$|zf(z)| = \frac{\pi|z|}{|(x+Ri)^2+a^2|}\cdot\frac{1}{|\tan\pi(x+Ri)|}$$
$$= \underline{\frac{\pi\sqrt{x^2+R^2}}{|(x+Ri)^2+a^2|}}\cdot\underset{\sim\sim\sim}{\frac{1+\tan^2\pi x\tanh^2\pi R}{\tan^2\pi x + \tanh^2\pi R}}$$

ここで下線部、波線部はそれぞれ $R\to\infty$ で $0, \dfrac{1+\tan^2\pi x}{\tan^2\pi x}$ に収束するので、$|f(z)| \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$ が得られます。

(3)　留数定理から

$$\oint_\Gamma f(z)dz = 2\pi i\left(-\pi\frac{\cot\pi ia}{2ia} - \pi\frac{\cot\pi(-ia)}{-2ia} + \sum_{n=-(R-1)}^{(R-1)}\frac{1}{\pi}\frac{1}{n^2+a^2}\right)$$

のように取れます。最後に $\displaystyle\oint_\Gamma f(z)dz \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$ から所望の式を得ます。

(4)　(2) の結果

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi\cosh(\pi a)}{2a\sinh(\pi a)} - \frac{1}{2a^2}$$

に対して $a \to 0$ とします。これはロピタルの定理かテイラー展開を使えばよく第一章章末問題 3 でやったように $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ が得られます。■

第 12 章

留数定理の応用

前章の続きとして、留数定理を用いて実関数の積分を求めます。この手法は主に 2 パターンの積分に対して有効であり、第一に角変数 $\theta : 0 \to 2\pi$ の積分、第二に実軸全体 $x : -\infty \to \infty$ の積分を扱います。第二の手法ではジョルダンの補助定理が使えるように、うまく周回経路を選ぶ必要があります。

12.1 定積分の技巧

冒頭に記した通り、留数定理は大きく分けて 2 通りの定積分に有効です。

$$\int_0^{2\pi} f(\sin\theta, \cos\theta)d\theta\ ,\quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

順に追って説明しますが、両者に共通の決まりごとがあるので、まずこれを押さえておきます。

戦略：複素積分を使う際の決まり事

次式の要領で定積分を複素周回積分に変換して計算するとき、次を遵守する。

$$\int_a^b f dx = \int_C f dz$$

(1) 被積分関数の分子に三角関数があるときは、$e^{i\theta}$ で置き換える。
(2) 経路 C は特異点の上を通ってはならない。

12.2 角変数型定積分の技巧

$\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\sin\theta, \cos\theta)d\theta$ の形をした定積分には複素積分が有効です。*1 $z = e^{i\theta}$ とおくことで*2 、積分区間 $(\theta|0 \to 2\pi)$ は「$C(: z = e^{i\theta}$ で表される単位円) を正方向一

*1 一変数の微積分では $t = \tan\frac{\theta}{2}$ とおけば $\sin\theta = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos\theta = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ と書け、これで求積します。

*2 このとき $\cos\theta = \dfrac{z+z^{-1}}{2}$, $\sin\theta = \dfrac{z-z^{-1}}{2i}$ と書けます。

周」と書き換えられ、式で表すと

$$\int_0^{2\pi} f d\theta = \int_C f \frac{dz}{iz}$$

となります。置換積分の要領で $z = e^{i\theta}$ から $\dfrac{dz}{d\theta} = ie^{i\theta} = iz$ を得ていることに注意してください。

戦略：角変数型定積分

$\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\sin\theta, \cos\theta) d\theta$ の積分は $z = e^{i\theta}$ とおいて、

$$\int_0^{2\pi} f d\theta = \oint_C f \frac{dz}{iz}$$

と書き換えた後、右辺を留数定理によって求める。

例題　次の定積分を求めよ。

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 3\cos\theta} d\theta$$

解答　$z = e^{i\theta}\left(\Leftrightarrow \cos\theta = \frac{z+z^{-1}}{2}\right)$ として

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 3\cos\theta} d\theta = \oint_C \frac{1}{5 + 3\frac{z+z^{-1}}{2}} \frac{dz}{iz} \qquad \text{(以下、}C\text{ は単位円を正方向に一周)}$$

$$= \oint_C \frac{2}{i(3z^2 + 10z + 3)} dz = \frac{2}{i} \oint_C \frac{1}{3(z+3)(z+\frac{1}{3})} dz$$

と書き換えることができます。$\dfrac{1}{3(z+3)(z+\frac{1}{3})}$ は**1 位の極**$z = -3, -\frac{1}{3}$ を持っていますが、**C の中には** $z = -\frac{1}{3}$ **しか入っていない**ので $-\frac{1}{3}$ について式 (11.7) から留数を求めて

$$\mathrm{Res}(-1/3) = \lim_{z \to \frac{-1}{3}} \frac{1}{(3z^2 + 10z + 3)'} = \lim_{z \to \frac{-1}{3}} \frac{1}{6z + 10} = \frac{1}{8}$$

となるから、留数定理により答えは

$$I = \frac{2}{i} \oint_C \frac{1}{3z^2 + 10z + 3} dz = \frac{2}{i} \cdot 2\pi i \mathrm{Res}(-1/3) = \frac{2}{i} \cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{8} = \frac{\pi}{2}$$

として得られます。■

例題　次の積分を求めよ。

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos m\theta}{1 + 2a\cos\theta + a^2} d\theta \qquad \text{ただし } 0 < a < 1 \text{ で } m \text{ は自然数}$$

解答 被積分関数の分子が $\cos$ **なので** $e^{i\theta}$ **にすり替えましょう。**

つまり $J = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{e^{im\theta}}{1+2a\cos\theta + a^2}d\theta$ とおいて J を求め、J から I を求めます。$z = e^{i\theta}$ とおけば

$$
\begin{aligned}
J &= \int_0^{2\pi} \frac{(e^{i\theta})^m}{1+2a\cos\theta+a^2} = \oint_C \frac{z^m}{1+2a\frac{z+z^{-1}}{2}+a^2}\frac{dz}{iz} \\
&= \frac{1}{ia}\oint_C \frac{z^m}{\left(z+\frac{1}{a}\right)(z+a)}dz \qquad (C\text{ は単位円を正方向に廻る})
\end{aligned}
$$

となります。ここで $\dfrac{z^m}{\left(z+\frac{1}{a}\right)(z+a)}$ の極は $z = -a, \frac{1}{a}$ の 2 つであり、どちらも **1 位**です。問題文より $0 < a < 1$ なので曲線 C 内にある特異点は $-a$ のみなので、留数 $\mathrm{Res}(-a)$ は式 (11.7) により

$$
\mathrm{Res}(-a) = \lim_{z\to -a}\frac{z^m}{\left(z^2+\left(a+\frac{1}{a}\right)z+1\right)'} = \lim_{z\to -a}\frac{z^m}{2z+a+\frac{1}{a}} = \frac{(-a)^m}{\frac{1}{a}-a} = \frac{2\pi(-a)^m}{1-a^2}a
$$

が得られるので、留数定理により J は

$$
J = \frac{1}{ia}\int_C \frac{z^m}{\left(z+\frac{1}{a}\right)(z+a)}dz = \frac{1}{ia}\cdot 2\pi i \mathrm{Res}(-a) = \frac{1}{ia}\cdot 2\pi i\cdot\frac{2\pi(-a)^m}{1-a^2}a = \frac{2\pi(-a)^m}{1-a^2}
$$

として得られます。最後に $I = \Re(J)$[*3] より、答えは $I = \dfrac{2\pi(-a)^m}{1-a^2}$ となります。■

12.3 実軸上定積分の技巧 (基本形とフーリエ変換)

先に準備をしておきます。

三角関数の不等式

定理 12.1 $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$ のとき、次の不等式が成立する。

$$
\sin\theta \ge \frac{2}{\pi}\theta \tag{12.1}
$$

$y = \sin x$ と $y = \dfrac{2}{\pi}x$ を実際に図に書けばすぐに示せ、具体的に問題を解くときには三角不等式[*4] が役に立ちます。$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 型の積分のほとんどは、次の定理で一

---

*3 $\Re(z)$ は z の実部。

*4

$$
|z_1+z_2| \le |z_1| + |z_2| \tag{12.2}
$$

証明自体は簡単です。

$$|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2}) = |z_1|^2 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2$$

$$(|z_1|+|z_2|)^2 = |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2$$

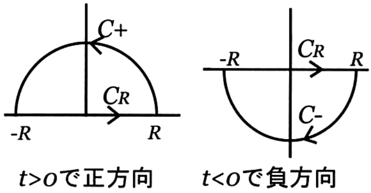
より辺々引いて $(|z_1|+|z_2|)^2 - |z_1+z_2|^2 = 2|z_1|z_2| - 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) \ge 0$ から得られます。(Rez は z の実部)

掃することができます。[*5]

半円複素積分

定理 12.2 実軸上に特異点を持たない $f(z)$ が、実数 $\theta, k, M > 0$ および大きい $R(>0)$ に対し、$|f(Re^{i\theta})| < \dfrac{M}{R^k}$ を満たすならば、図の経路内に存在する $f(z)$ の特異点 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N$ に対し、次の式が成立する。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{itx}dx = \begin{cases} 2\pi i \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \mathrm{Res}(\alpha_i) & t \geq 0 \text{ のとき} \\ -2\pi i \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \mathrm{Res}(\alpha_i) & t < 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{12.3}$$



$t > 0$ のみ示します。$I_R = \displaystyle\int_{-R}^{R} f(x)e^{itx}dx = \int_{C_R} f(z)e^{itz}dz$ とおくと留数定理から

$$\oint_{C_R+C_+} f(z)e^{itz}dz = I_R + \int_{C_+} f(z)e^{itz}dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{N} \mathrm{Res}(\alpha)$$

と書け、$I_R = 2\pi i \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \mathrm{Res}(\alpha) - \int_{C_+} f(z)e^{itz}dz$ において $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{C_+} f(z)dz = 0$ が成立すれば良いことがわかります。これを挟み撃ちで示しましょう。C_+ は $z = Re^{i\theta}$ $(\theta : 0 \to \pi)$ と表されるので、仮定より

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_+} f(z)e^{itz}dz \right| &= \left| \int_0^{\pi} f(Re^{i\theta})iRe^{i\theta}e^{itR(\cos\theta + i\sin\theta)}d\theta \right| \\ &\leq \int_0^{\pi} \left| f(Re^{i\theta})iRe^{i\theta}e^{itR\cos\theta}e^{-tR\sin\theta}d\theta \right| \\ &= \int_0^{\pi} \frac{M}{R^{k-1}}e^{-tR\sin\theta}d\theta \qquad (12.4) \\ &\leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M}{R^{k-1}}e^{-2tR\theta/\pi}d\theta \qquad (12.5) \\ &= \frac{2M}{R^{k-1}}\frac{\pi}{2tR}(1 - e^{-tR}) \to 0 \quad (R \to \infty) \qquad (12.6) \end{aligned}$$

[*5] $f(x)$ のフーリエ変換は

$$\mathscr{F}[f] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx$$

のように定義され (フーリエ解析の項参照)、これを実際に求める際にもこの定理が有用です。

式 (12.4) から式 (12.5) にかけて不等式 (12.2) を使っています。不等式 (12.2) が使えるのは $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ の範囲なので $\int_0^{\pi} e^{-Rt\sin\theta}d\theta = 2\int_0^{\pi/2} e^{-Rt\sin\theta}d\theta$ という変形が入っているのに注意してください。これで定理が証明できたことになります。($t<0$ の場合は読者が証明してみてください)□

この外周の積分で行った計算から次の主張が得られます（証明は略)。

Jordan（ジョルダン）の補助定理

定理 12.3 実軸上に特異点を持たない $f(z)$ が、実数 $\theta, k, M>0$ および大きい $R(>0)$ に対し、$|f(Re^{i\theta})| < \dfrac{M}{R^k}$ を満たすならば、次が成立する。

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_+\text{を任意に切り取った扇}} f(z)e^{itz} = 0 \quad (t>0\text{のとき})$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_-\text{を任意に切り取った扇}} f(z)e^{itz} = 0 \quad (t<0\text{のとき})$$

ただし C_+, C_- は前の定理で用いた図とする。

例題　式 (12.3) を使って以下の定積分を求めよ。ただし $\varepsilon>0$ とする。

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x-i\varepsilon}dx$　(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}dx$　(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ix}}{1+x^2}dx$　(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{1+x^4}dx$

(1)　$t=+1$ なので経路 $C=C_R+C_+$ を使います。$\dfrac{e^{iz}}{z-i\varepsilon}$ は 1 位の極 $i\varepsilon$ を経路 C 内に持つので、留数は $\mathrm{Res}(i\varepsilon)=e^{-\varepsilon}$ となり、

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x-i\varepsilon}dx = 2\pi i e^{-\varepsilon}$$

が得られます。

(2)　$t=0$ なので C_+、C_- のどちらをとっても良いです。$C=C_R+C_+$ として考えます。$\dfrac{1}{(1+z^2)^2}$ は 2 位の極 $\pm i$ を持ち、経路 C 内にあるのは $+i$ のみなので、留数は式 (11.6) により $\mathrm{Res}(i)=\dfrac{1}{4i}$ となるから答えは $2\pi i\mathrm{Res}(i)=\dfrac{\pi}{2}$ となります。

(3)　$t=-1$ なので $C=C_R+C_-$ の経路で考えます。$\dfrac{e^{-iz}}{1+z^2}$ の極は $\pm i$ でどちらも 1 位ですが、C 内にあるのは $-i$ だけです。留数は $\mathrm{Res}(-i)=\dfrac{e}{-2i}$ となるので答えは

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ix}}{1+x^2}dx = -2\pi i\mathrm{Res}(-i) = \pi e$$

となります。

(4)　分子の三角関数は e^{ix} に置き換えます。求めるべき積分を I とおき、$J=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{1+x^4}dx$ として J を求めます。$1+z^4=0$ の根は ($z=e^{i\phi}$ とおいて

ϕ を求めればよい) $e^{\frac{i\pi}{4}}, e^{\frac{3i\pi}{4}}, e^{\frac{5i\pi}{4}}, e^{\frac{7i\pi}{4}}$ の 4 つで、このうち C 内にあるのは $e^{\frac{i\pi}{4}}, e^{\frac{3i\pi}{4}}$ の 2 つで、どちらも 1 位です。それぞれ α, β とおくと、式 (12.1) を使って、留数は $\mathrm{Res}(\alpha) = \dfrac{e^{i\alpha}}{4\alpha^3}$ および $\mathrm{Res}(\beta) = \dfrac{e^{i\beta}}{4\beta^3}$ と書けるから、

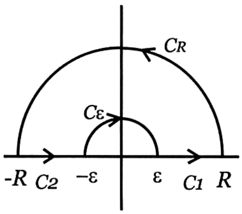
$$J = 2\pi i(\mathrm{Res}(\alpha) + \mathrm{Res}(\beta)) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\cos(\tfrac{1}{\sqrt{2}}) + \sin(\tfrac{1}{\sqrt{2}}) \right)$$

であり、$I = \Re(J) = J$ で答えが得られます。■

12.4　実軸上定積分：原点が特異点の関数を積分する

12.4.1　半ドーナツ経路

例えば $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ などを考える場合、複素積分に帰結させて求めるには**分子の三角関数を** exp **になおす**必要があるため $\displaystyle\oint_C \frac{e^{iz}}{z} dz$ の形にして考える必要があります。元の関数と違い、$\dfrac{e^{iz}}{z}$ は原点を 1 位の極に持つため、原点を避けた図のような経路を使う必要があります。



例題　定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ を求めよ。

解答　上の説明にあるように図の経路で考えましょう。$C_R : z = Re^{i\theta}, (\theta|0 \to \pi), C_\varepsilon : z = \varepsilon e^{i\theta}, (\theta|\pi \to 0)$ なので、

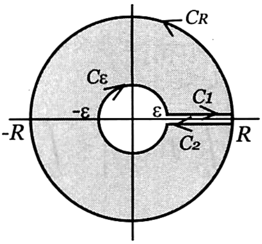
$$\begin{aligned} I_R = \int_{C_1+C_R+C_2+C_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz &= \int_\varepsilon^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_R^\varepsilon \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{C_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz \\ &= \int_\varepsilon^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{C_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz \end{aligned}$$

第二項は式 (12.3) の証明同様に $R \to \infty$ で 0 に収束します。第三項は $\varepsilon \to 0$ で $-\pi i$ に収束しますが、こちらは次のように示します。

$$\int_{C_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_\pi^0 \frac{\exp(\varepsilon e^{i\theta})}{\varepsilon e^{i\theta}} i\varepsilon e^{i\theta} d\theta = -i \int_0^\pi \exp(\varepsilon e^{i\theta}) d\theta \xrightarrow{\varepsilon \to 0} -i \int_0^\pi d\theta = -i\pi$$

経路の中に特異点がないのでコーシーの積分定理 (あるいは留数定理) より $I_R = 0$ となり、$R \to 0, \varepsilon \to 0$ において次の式を得ます。($[e^{ix} - e^{-ix}]/2i = \sin x$ に注意！)

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$



12.4.2　メリン変換とドーナツ経路

$$G(a) = \int_0^\infty f(x)x^{a-1}dx$$

で表される積分変換をメリン変換と呼びます。*6
この形の積分は、図のような経路に沿って複素積分をとるとうまくいきます。*7

原点が特異点なのでこれを避ける経路をとるのですが、正則な $f(z)$ に対し、$0 < a < 1$ のとき $z^{a-1}f(z)$ において $z = 0$ が極にならないことに注意しておきましょう。($a - 1$ が整数にならないので、ローラン展開できない！！) このような特異点を**分岐点**と呼びます。

例題　$f(x) = \dfrac{x^{a-1}}{1+x}$ の定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}dx$　$(0 < a < 1)$ を求めよ。

解答　まず経路を確保します。$C_R : z = Re^{i\theta}, (\theta|0 \to 2\pi)$、$C_\varepsilon : z = \varepsilon e^{i\theta}, (\theta|2\pi \to 0)$ であり、$I_1 = \displaystyle\int_{C_1} f(z)dz$、$I_2 = \displaystyle\int_{C_2} f(z)d$ とおくと $I_1 = \displaystyle\int_\varepsilon^R f(x)dx$、$I_2 = \displaystyle\int_R^\varepsilon f(xe^{2\pi i})dx$ と書ける (C_2 は半径 R の円 C_R を一周してから通るので、偏角が変更されていることに注意！) ので、

$$\begin{aligned}
I_R &= \oint_{C_1+C_R+C_2+C_\varepsilon} f(z)dz \\
&= \int_\varepsilon^R \frac{x^{a-1}}{1+x}dx + \int_{C_R} f(z)dz + \int_R^\varepsilon \frac{(xe^{2\pi i})^{a-1}}{1+x}dx + \int_{C_\varepsilon} f(z)dz \\
&= (1 - e^{2\pi i(a-1)}) \int_\varepsilon^R \frac{x^{a-1}}{1+x}dx + \int_{C_R} f(z)dz + \int_{C_\varepsilon} f(z)dz \qquad (12.7)
\end{aligned}$$

と分解できます。$R \to \infty$ で $\int_{C_R} \frac{z^{a-1}}{1+z}dz \to 0$ および $\varepsilon \to 0$ で $\int_{C\varepsilon} \frac{z^{a-1}}{1+z}dz \to 0$ になることを示しておきます。

$$\left|\int_{C_R} \frac{z^{a-1}}{1+z}dz\right| \leq \int_{C_R} \left|\frac{z^{a-1}}{1+z}dz\right| = \int_0^{2\pi} \frac{R^{a-1}|e^{i(a-1)\theta}|}{|Re^{i\theta}+1|}|ie^{i\theta}Rd\theta| \qquad (12.8)$$

$$\leq \int_0^{2\pi} \frac{R^{a-1}}{R-1}Rd\theta = 2\pi\frac{R^a}{R-1} \to 0 \quad (R \to \infty) \qquad (12.9)$$

---

*6 Mellin transform:ガンマ関数 $\int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx$ の e^{-x} を $f(x)$ に拡張したもので、$f(x)$ は必然的に e^{-x} のように収束する関数である必要があります。

*7 ただし $f(z)$ は実軸上に正の特異点を持たないとします。

(ただし式 (12.8 右) から式 (12.9 左) で三角不等式 (12.2) を使い、$\frac{1}{|Re^{i\theta}+1|} < \frac{1}{|Re^{i\theta}|-|1|}$ としています) また、同様に三角不等式を用いて C_ε において $\varepsilon \to 0$ として

$$\left|\int_{C_\varepsilon} f(z)dz\right| \leq \int_{C_\varepsilon}\left|\frac{z^{a-1}}{1+z}dz\right| = \int_{2\pi}^{0}\frac{|\varepsilon^{a-1}e^{2\pi i(a-1)}|}{|1+\varepsilon e^{i\theta}|}|i\varepsilon e^{i\theta}d\theta| \leq \int_{2\pi}^{0}\frac{\varepsilon^a}{1-\varepsilon}d\theta \to 0$$

一方 I_R は灰色領域の周回積分なので、$\dfrac{z^{a-1}}{1+z}$ の灰色領域内の極 $z=-1$ により留数は $\mathrm{Res}(-1) = (-1)^{a-1} = e^{\pi i(a-1)}$ と書けます。留数定理により

$$I_R = 2\pi i\mathrm{Res}(-1) = 2\pi i e^{\pi i(a-1)} \tag{12.10}$$

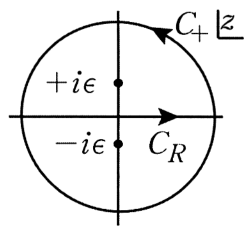
となり、$R\to\infty, \varepsilon\to 0$ において式 (12.7) と式 (12.10) を比較しすれば

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}dx = \frac{2\pi i e^{(a-1)\pi i}}{1-e^{2\pi i(a-1)}} = \frac{2\pi i}{e^{\pi ai}-e^{-\pi ai}} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)} \tag{12.11}$$

が得られます。■

12.4.3 コーシーの主値積分の方法

実軸上に特異点のある関数を積分する際、広義積分として定積分を再定義する必要があります。例えば



$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}dx$$

を計算する際、$x=0$ での発散を防ぐため、次のように I を書き換えます。

$$I_\pm = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x\mp i\epsilon}$$

このように、求めるべき積分に対して特異点を $\pm i\epsilon$ だけずらし、後で $\epsilon\to +0$ とする手法を**コーシーの主値積分**と言います。実際に計算するには上 (下) 半平面で積分し、

$$I_\pm = \lim_{\epsilon\to 0}\oint_{C_R+C_+}\frac{e^{iz}}{z\mp i\epsilon}dz - \int_{C_+}\frac{e^{iz}}{z\mp i\epsilon}dz = \lim_{\epsilon\to 0}\begin{cases}2\pi i e^{-\epsilon} & (+)\\ 0 & (-)\end{cases} = \begin{cases}2\pi i & (+)\\ 0 & (-)\end{cases}$$

のようにします。2 通り得られた値のうち、どちらが答えとして適切なのかはその場その場で対処して考える必要があります。*8 さらに例えば正の実数 q に対し

$$F = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{k^2-q^2}dk$$

*8 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \pi$ を示す際、$I_\pm$ の虚部を取るようなことをしてもうまくいかない (被積分関数の分母も虚数) ことに注意。正しくは $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2ix}dx = \frac{2\pi i - 0}{2i} = \pi$ とします。

を計算する際、被積分関数が $k=\pm q$ で発散してしまうため、

$$F_{\pm\pm}\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}dk}{\big(k-(q\pm i\epsilon)\big)\big(k+(q\pm i\epsilon)\big)},F_{\pm\mp}\quad\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}dk}{\big(k-(q\pm i\epsilon)\big)\big(k+(q\mp i\epsilon)\big)}$$

（複合同順）の、計 4 通りの積分を再定義する必要があります。

12.4.4　その他有名な一般型積分

具体的な計算は割愛しますが、有名な積分と経路の組み合わせを記しておきます。例外はありますが、およそこれだけのパターンを知っておけば十分でしょう。

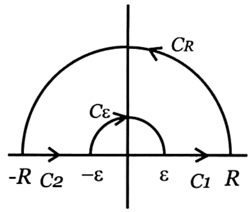


図 12.1　半ドーナツ

1. **原点が特異点 → 図 12.1**

$$\int_0^{\infty}\frac{\log x}{1+x^2}dx=0$$

この場合 $z=0$ は (ローラン展開不能な) 特異点です。

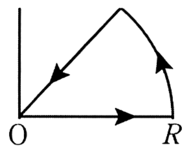


図 12.2　ピザ

2. **フレネル積分 → 図 12.2（$\pi/4$ 回転）**

$$\int_0^{\infty}\sin x^2dx=\int_0^{\infty}\cos x^2dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

e^{iz^2} を図 12.2 の経路で複素積分すればよいでしょう。

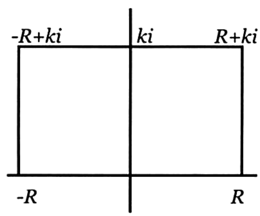


図 12.3　長方形回路

3. **exp(実数) による関数を積分するとき → 図 12.3**

次のラプラス積分などは図 12.3 の経路を用います。

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\cos(ax)dx=\sqrt{\pi}e^{-\frac{a^2}{4}}$$

定数 k の値はケースバイケースで。この例では $k=a/2$ とすれば良いです。(ふつう極の 2 倍にすると上手くいきます) $\dfrac{e^{ix}}{\cosh x}$ や $\dfrac{e^{ax}}{1+e^x}$ の積分もこの一種です。

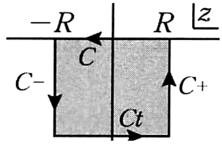
例題　$t>0$ に対し次の積分（ガウス関数のフーリエ変換）を計算せよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2+2itx}dx$$

平方完成し $-x^2+2itx=-(x-it)^2-t^2$ とします。

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2+2itx}dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-it)^2-t^2}dx=e^{-t^2}\underline{\int_{-it-\infty}^{-it+\infty}e^{-z^2}dx}$$

下線部の式を計算するには、図のように周回経路を取ります。図の経路の中に e^{-z^2} の特異点はないのでコーシーの積分定理



が使え、次が成り立ちます。

$$\begin{aligned}\int_{C_t} e^{-z^2}dz &= \oint_{C+C_-+C_t+C_+} e^{-z^2} - \int_C e^{-z^2}dz - \int_{C_+} e^{-z^2}dz - \int_{C_-} e^{-z^2}dz \\ &= -\int_C e^{-z^2}dz - \int_{C_+} e^{-z^2}dz - \int_{C_-} e^{-z^2}dz\end{aligned}$$

各項を $R \to \infty$ において計算しましょう。

まず C_+ では $z = R + yi$ に対し $y : -t \to 0$ と取って

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_+} e^{-z^2}dz\right| = \left|\int_{-t}^{0} e^{-(R+yi)^2} idy\right| &= e^{-R^2}\int_{-t}^{0}\left|e^{y^2-2Ryi}\right|dy \\ &\le e^{-R^2}\int_{-t}^{0} e^{y^2}dy \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

となり、同様に C_- の積分も $R \to \infty$ で 0 になることが示せます。

最後にガウス積分から $R \to \infty$ で $-\int_C e^{-z^2}dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ となり、

$$\underline{波線部} = \lim_{R\to\infty}\int_{C_t} e^{-z^2}dz = \sqrt{\pi}$$

となることがわかります。答えは $\sqrt{\pi}e^{-t^2}$ です。■

12.5 演習問題

1 次の定積分を複素積分を用いて計算せよ。

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(n\theta - \sin\theta)$$

2 次の定積分を複素積分を利用して計算せよ。ただし $\epsilon > 0$ とする。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x - i\epsilon}dx + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x + i\epsilon}dx$$

最後に $\epsilon \to 0$ として $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ を計算せよ。

3 次の定積分をそれぞれ複素積分を用いて計算せよ。

(1) $\int_0^{\infty}\sin x^2 dx$　(2) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{\cosh x}$

解答

1 角変数積分です。三角関数を指数関数に置き換え、次の積分を考えましょう。

$$I = \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}e^{i(n\theta - \sin\theta)}d\theta$$

問題で求められているのは ReI です。まずは I を計算しましょう。角変数積分を複素積分にするには $z = e^{i\theta}$ とおきます。

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta - i\sin\theta} e^{in\theta} d\theta \\
&= \oint_C e^{\bar{z}} z^n \frac{dz}{iz} = \frac{1}{i} \oint_C z^{n-1} e^{1/z} dz
\end{aligned}
$$

とし、被積分関数をローラン展開して留数を拾うと $c_{-1} = \dfrac{1}{n!}$ となるので、留数定理から $I = \dfrac{2\pi}{n!}$ を得ます。この実部を取って答えは $\dfrac{2\pi}{n!}$ となります。

2 $I_\pm = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x \mp i\epsilon} dx$ とおきます。これはコーシーの主値積分の項で扱ったものと同一で、$I_+ = 2\pi i e^{-\epsilon}, I_- = 0$ となり、

$$
I_+ + I_- = 2\pi i e^{-\epsilon}
$$

となります。I_- について積分変数を $x \to -x$ とすると

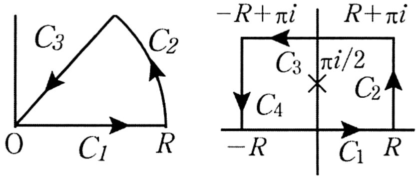
$$
I_- = \int_{\infty}^{-\infty} \frac{e^{-ix}}{-x + i\epsilon} d(-x) = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x - i\epsilon} dx
$$

となり、

$$
I_+ + I_- = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2i \sin x}{x - i\epsilon} dx
$$

が得られます。これにより $\epsilon \to 0$ として $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$ を得ます。

3 それぞれ次の図を用います。



(1) e^{iz^2} を積分します。この関数は正則であることに気をつけ、

$$
\int_{C_1} e^{iz^2} dz = \oint_{C_1+C_2+C3} e^{iz^2} dz - \int_{C_2} e^{iz^2} dz - \int_{C_3} e^{iz^2} dz \tag{12.12}
$$

とし、右辺第一項はコーシーの積分定理から 0 になり、第三項はパラメータ $t : R \to 0$ に対し $z = \sqrt{i}t, dz = e^{\frac{\pi i}{4}} dt$ と書け、

$$
\int_{C_3} e^{iz^2} dz = e^{\frac{\pi i}{4}} \int_R^0 e^{-t^2} dt
$$

となります。最後に C_2 についての積分を考えましょう。曲線 C_2 は実数パラメータ $\theta : 0 \to \pi/4$ によって $z = Re^{i\theta}$ で表されます。例によって絶対値を上から押さえ

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_2} e^{iz^2} dz\right| &\leq \left|\int_0^{\pi/4} e^{iR^2 e^{2i\theta}} Rie^{i\theta} d\theta\right| \leq \int_0^{\pi/4} \left|e^{iR^2 e^{2i\theta}} Rie^{i\theta} d\theta\right| \\ &= R\int_0^{\pi/4} e^{-2R^2 \sin\theta} d\theta \leq R\int_0^{\pi/4} e^{-2R^2 \cdot \frac{2\theta}{\pi}} d\theta \\ &= R \cdot \frac{\pi}{4R^2}\left[e^{-\frac{4R^2\theta}{\pi}}\right]_0^{\pi/4} \to 0 \ (R \to \infty)\end{aligned}$$

となることがわかります。これより、式 (12.12) で $R \to \infty$ として

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} e^{ix^2} dx &= \oint_{C_1+C_2+_C3} e^{iz^2} dz - \int_{C_2} e^{iz^2} dz - \int_{C_3} e^{iz^2} dz \\ &= 0 - 0 - e^{\frac{\pi i}{4}} \int_{+\infty}^{0} e^{-t^2} dt = e^{\frac{\pi i}{4}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}\end{aligned}$$

となり (ガウス積分を用いました)、両辺の虚部を取ると $\displaystyle\int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ が得られます。

(2) 次の積分を考えましょう。

$$\oint \frac{e^{iz}}{\cosh z} dz = \int_{C_1} \frac{e^{iz}}{\cosh z} dz + \int_{C_2} \frac{e^{iz}}{\cosh z} dz + \int_{C_3} \frac{e^{iz}}{\cosh z} dz + \int_{C_4} \frac{e^{iz}}{\cosh z} dz$$

左辺は留数定理から $2\pi i e^{-\frac{\pi}{2}}$ となり、右辺は C_2, C_4 についての積分が $R \to \infty$ で 0 となります。残った積分を整理すると、

$$\begin{aligned}&\int_{C_1} \frac{e^{iz}}{\cosh z} dz + \int_{C_3} \frac{e^{iz}}{\cosh z} dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{\cosh x} dx + \int_{R}^{-R} \frac{e^{i(x+\pi i)}}{\cosh(x+\pi i)} dx \\ =&(1+e^{\pi}) \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{\cosh x} dx \stackrel{R\to\infty}{\longrightarrow} (1+e^{-\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{\cosh x} dx\end{aligned}$$

となり ($\cosh(x+\pi i) = -\cosh x$ を用いました)、結果的に $R \to \infty$ において

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{\cosh x} dx = \frac{\pi i}{\cosh \frac{\pi}{2}}$$

が得られます。■

第 13 章

フーリエ級数展開

$a \leq x \leq b$ の閉じた区間を定義域とする関数を $f(x)$ とすると、これは周期 $b-a$ の周期関数の一部と見ることができます。このような関数を調べるにはフーリエ級数の手法が有効であり、有限区間の両端を境界に持つ微分方程式を調べる際にもこの手法が役に立ちます。

13.1 複素フーリエ級数展開

周期 L の周期関数 $f(x)$ を次のように展開することを考えます。

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi nix}{L}} \tag{13.1}$$

このような c_n を求めて $f(x)$ を展開することで周期関数 $f(x)$ を調べることができるようになるのです。このような展開を**複素フーリエ展開**（あるいは単にフーリエ級数展開）と呼びます。**複素フーリエ級数**c_n を求めるために、式 (13.1) の両辺に $e^{-i\frac{2\pi mx}{L}}$ (m は整数) をかけて積分してやります。

$$\begin{aligned}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)e^{-i\frac{2\pi mx}{L}}dx &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_{-L/2}^{L/2} e^{\frac{2\pi ix}{L}(n-m)}dx \\ &= \cdots + 0 + 0 + (L\cdot c_m) + 0 + 0 + \cdots\end{aligned}$$

ただし $\displaystyle\int_{-L/2}^{L/2} e^{i\frac{2\pi ix}{L}(n-m)}dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n \text{ のとき}) \\ L & (m = n \text{ のとき}) \end{cases} = L\delta_{nm}$ となることを使いました。上の式を整理すれば、次の主張を得ます。

複素フーリエ級数展開

定理 13.1 周期 L の区分的に滑らかな周期関数 $f(x)$ は次のように展開できる。

$$\frac{f(x)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi nix}{L}}$$

フーリエ係数c_n は以下のように決まる。

$$c_n = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-i\frac{2\pi mx}{L}} dx$$

多くの教科書は実フーリエ係数を用いた展開を扱っているので、そちらも扱いましょう。

13.2 実フーリエ級数展開

$a_n = c_n + c_{-n}$ および $b_n = i(c_n - c_{-n})$ と置けば、複素フーリエ展開により

$$\begin{aligned} f(x) =& \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{\frac{2\pi inx}{L}} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi inx}{L}} + c_0 \\ =& \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n + ib_n}{2}\right)(\cos\tfrac{2\pi nx}{L} - i\sin\tfrac{2\pi nx}{L}) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right)(\cos\tfrac{2\pi nx}{L} + i\sin\tfrac{2\pi nx}{L}) + \frac{a_0}{2} \\ =& \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1} \left(a_n \cos\tfrac{2\pi nx}{L} + b_n \sin\tfrac{2\pi nx}{L}\right) \end{aligned}$$

と変形でき、先のフーリエ係数の式をまとめれば次の定理を得ることができます。

実フーリエ級数展開

定理 13.2 区分的に滑らかな周期 L の周期関数 $f(x)$ は次のように展開できる。

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\tfrac{2\pi nx}{L} + b_n \sin\tfrac{2\pi nx}{L}\right) \qquad (13.2)$$

また、フーリエ係数 a_n, b_n は次のように決まる。

$$a_n = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\cos\tfrac{2\pi nx}{L} dx,\ b_n = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\sin\tfrac{2\pi nx}{L} dx \qquad (13.3)$$

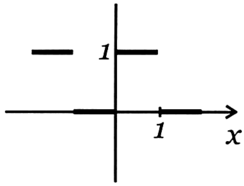
フーリエ級数が収束するのかは興味のあるところですが、ここではひとまずおいておきましょう。[*1] どちらも展開した結果は同じなので、計算のしやすい方を選ぶのが賢い判断でしょう。ここではもっぱら式 (13.1) にしたがって展開することにします。

*1 例えば高木 [12] の第6章、千葉 [15] 第5章などを参照のこと。

例題　周期 2 の次の関数 $f(x)$ をフーリエ展開せよ。

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-1 \le x < 0) \\ 1 & (0 \le x < 1) \end{cases}$$

解答　$L = 2$ なので、c_n は次のように計算できます。



$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-in\pi x}dx \\ &= \begin{cases} 1/2 & (n = 0) \\ \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{-in\pi}[e^{-in\pi x}]_0^1 & (n \ne 0) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{2} & (n = 0) \\ \dfrac{1}{n\pi}e^{\frac{in\pi}{2}}\sin\frac{in\pi}{2} & (n \ne 0) \end{cases} \end{aligned}$$

これにより、$f(x)$ は次のようにフーリエ展開できます。

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x} = \sum_{n=-\infty}^{0} c_n e^{in\pi x} + c_0 + \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{in\pi x} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{-n}e^{-in\pi x} + c_0 + \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{in\pi x} \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{in\pi(x+1/2)} - e^{-in\pi(x+1/2)}\right)\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{in\pi} \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} 2\sin\left(n\pi\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

例題　次の周期 1 の関数 $f(x) = x \ \ (0 < x \le 1)$ をフーリエ展開せよ。

解答　まず c_n を求めます。

$$c_n = \int_{-1/2}^{1/2} xe^{-2n\pi ix}dx$$

であり $c_0 = 0$ です。$n \ne 0$ のときは、この積分を計算して $c_n = \dfrac{\cos n\pi}{(-1)^{n-1}}$ を求め、これを展開式に代入して

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{1} c_n e^{2ni\pi x} + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{2ni\pi x} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{-2in\pi}e^{-2n\pi ix} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2in\pi}e^{2n\pi ix} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\pi}\sin 2n\pi x \end{aligned} \tag{13.4}$$

を得ます。■

13.3 パーセバルの等式とその応用

重要な定理です。主に級数和の値を求めるために重宝します。単にフーリエ展開した両辺に特定の値を代入しても級数和の値が求められる場合がありますが、パーセバルの等式を用いるとさらに便利になります。

Parseval(パーセバル)の等式

定理 13.3 周期 L の $f(x)$ に対して、a_n, b_n を実フーリエ係数、c_n を複素フーリエ係数とすると、次が成立する。

$$\frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2}|f(x)|^2dx = \frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2),\quad \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2}|f(x)|^2dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n|^2$$

複素展開の場合について示しておきましょう。

$$\begin{aligned}\frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2}\overline{f(x)}f(x)dx &= \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2}\overline{\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{\frac{2\pi nix}{L}}\right)}\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_me^{\frac{2\pi mix}{L}}\\ &= \sum_n\sum_m \bar{c}_n\bar{c}_m\frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2}e^{\frac{2\pi ix(m-n)}{L}}\\ &= \sum_n\sum_m \bar{c}_n\bar{c}_m\delta_{nm} = \sum_n \bar{c}_nc_n\end{aligned}$$

となってパーセバルの式が示せますね。□

例題 次の等式が成立することを導け。

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

解答 重要な式です。すでに $x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n\pi}\sin 2n\pi x$ と展開しているので、これを使いましょう。周期が 1 なので

$$(\text{パーセバルの式左辺}) = 2\int_{-1/2}^{1/2}x^2dx = \frac{1}{6}$$

$$(\text{パーセバルの式右辺}) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2}$$

より両辺を＝で結べば所望の級数和を導けます。■

また、ここでは計算過程を省略しますが、$f(x)=x^2\ \ (-\pi<x\leq\pi)$ を展開すると

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)(-1)^n}{n^2}$$

となり、$x = \pi$ としても $\frac{\pi^2}{6}$ の級数表示が得られます。さらに $f(x)$ についてパーセバルの等式を用いれば次の式が示せます。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^2}{90}$$

13.4　フーリエ余弦展開とフーリエ正弦展開

ここでは $f(x)$ が区間 $[-l, l]$ で周期 $L = 2l$ を持つとして、$f(x)$ の実フーリエ展開

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(\tfrac{n\pi x}{l}) + b_n \sin(\tfrac{n\pi x}{l}) \right)$$

を考えます。$[-l, l]$ において奇関数を積分すると 0 になることを使えば、

$f(x)$ が偶関数のとき

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\tfrac{n\pi x}{l}) \quad (-l \le x < l),\ a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos(\tfrac{n\pi x}{l})dx$$

とかけ、さながら $f(x)$　$(0 \le x < l)$ を偶関数として $(-l \le x < l)$ に拡張したように考えることができます。これを $f(x)$ のフーリエ余弦展開と呼びます。また、

$f(x)$ が奇関数のとき

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\tfrac{n\pi x}{l}) \quad (-l \le x < l),\ b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin(\tfrac{n\pi x}{l})dx$$

とかけ、$f(x)$　$(0 \le x < l)$ を奇関数として $(-l \le x < l)$ に拡張したように考えることができます。これを $f(x)$ のフーリエ正弦展開と呼びます。

13.5　フーリエ級数と偏微分方程式

有限区間で定義される関数 $u(x,t)$ についての偏微分方程式において、初期条件が $f(x)$ で与えられたとき、すなわち $u(x,0) = f(x)$ であるならばフーリエ展開による解法が有効です。具体的な問題で考えてみましょう。

例題　$f(x)$ $(0 < x < L)$ を任意の滑らかな関数であるとする。

(1)　$f(x)$　$(0 < x < L)$ をフーリエ正弦級数に展開せよ。

(2)　$0 < x < L,\ 0 < t$ において $u(x,t)$ は次の偏微分方程式

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = v^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (\text{ただし } v > 0)$$

を満足している。$x = 0,\ L$ において $u(0,t) = 0$、$u(L,t) = 0$ および $u(x,0) = f(x)$ を満たすとして、変数分離を用いて解 $u(x,t)$ を求めよ。

解答

(1) まずフーリエ正弦展開係数を b_n とすれば

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(\tfrac{n\pi x}{L})dx$$

となるので、$f(x)$ は次のように展開できます。

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\tfrac{n\pi x}{L}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L}\sin\tfrac{n\pi x}{L}\int_0^L f(t)\sin(\tfrac{n\pi t}{L})dt$$

(2) $u(x,t) = X(x)T(t)$ と変数分離して与式に代入すると

$$\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} = \frac{v^2}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -m^2 \quad (一定)$$

となり、$T = e^{-m^2t}$、$X = A\sin(\frac{mx}{v}) + B\cos(\frac{mx}{v})$ $(A, B$ 定数) として T, X が得られます。境界条件から $X(0) = X(L) = 0$ なので、$B = 0$、$\dfrac{mL}{v} = n\pi$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が得られ、TX の重ね合わせを取って (定数を $A \to A_n$ として) [*2]

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-(\frac{vn\pi}{L})^2 t}\sin(\tfrac{n\pi x}{L}) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(\frac{vn\pi}{L})^2 t}\sin(\tfrac{n\pi x}{L})$$

とします。$t = 0$ において $u(x,0) = f(x)$ となるから、(1) より

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\tfrac{n\pi x}{L}) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\tfrac{n\pi x}{L})$$

となり $A_n = b_n(b_n$ は (1) で求めた) とわかります。これで $u(x,t)$ は

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{L}\int_0^L f(t)\sin(\tfrac{n\pi t}{L})dt\right\}e^{-(\frac{vn\pi}{L})^2 t}\sin(\tfrac{n\pi x}{L})$$

と展開できることがわかります。■

例題 $x^2 + y^2 = 1, 4$ の同心円内部での微分方程式 $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u(x,y) = 0$ について考える。境界条件は円のふちで $u(x^2+y^2=1) = \frac{2x^2+y^2}{x^2+y^2}, u(x^2+y^2=4) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ であったとする。

(1) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ と極座標変換し、微分方程式を書き変えよ。

(2) $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$ と変数分離し、境界条件が $u(1,\theta) = \cos^2\theta + 1, u(2,\theta) = \cos 2\theta, u(r,0) = u(r,2\pi)$ で与えられることから、この微分方程式の解 $u(r,\theta)$ を求めよ。

---

*2 n が不定なので、とりあえずすべての n で和をとる必要があります。この後、n について調整するために A_n の性質を考えるわけです。

解答 ちょっと難しいので、飛ばしても大丈夫です。

(1) 第三章の章末問題 [1] でも扱ったように、2 次元極座標のラプラシアンは

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

となり、ラプラス方程式は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)u(r,\theta)=0$$

となります。

(2) $u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$ とおいて変数分離すると

$$\frac{r^2}{R^2}\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}+\frac{r}{R}\frac{\partial R}{\partial r}=-\frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2}=\lambda^2\,(\text{定数})$$

とおくことができ、$\Theta(\theta)=A_\lambda\cos\lambda\theta+B_\lambda\sin\lambda\theta$ ととることができます。A_λ, B_λ は定数です。角度の境界条件 $\Theta(0)=\Theta(2\pi)$ を要求すれば、$\lambda=0,1,2,\cdots$ となります。一方で r 変数についての微分方程式

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}R(r)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}R(r)-\frac{\lambda^2}{r^2}=0$$

を解きましょう。これはちょうど**オイラー型**と呼ばれる型で、この解は $R(r)=r^{\pm\lambda}$ のように表されます。[*3] 以上より $R_\lambda(r)\Theta_\lambda(\theta)$ の線形結合を取って

$$u(r,\theta)=\sum_{\lambda=1}^{\infty}(a_\lambda r^\lambda+b_\lambda r^{-\lambda})(A_\lambda\cos\lambda\theta+B_\lambda\sin\lambda\theta)$$

と書けます。a_λ, b_λ は適当な定数です。境界条件と比較すると解には $\cos\theta, \cos 2\theta$ しか現れないので $B_\lambda=0$ とわかり、$a_\lambda A_\lambda\to a_\lambda, b_\lambda A_\lambda\to b_\lambda$ とおきなおして

$$u(r,\theta)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}(a_\lambda r^\lambda+b_\lambda r^{-\lambda})\cos\lambda\theta$$

$r=1,2$ のとき境界条件 $u(1,\theta)=2\cos 2\theta, u(2,\theta)=\cos 2\theta$ と比較して $a_2+b_2=2, 4a_2+\frac{1}{4}b_2=1$ となり、$a_2=\frac{2}{15}, b_2=\frac{28}{15}$ を得ます。$\lambda\neq 2$ のときは $a_\lambda, b_\lambda=0$ となり、$u(r,\theta)=\left(\frac{2}{15}r^2+\frac{28}{15r^2}\right)\cos 2\theta$ を得ます。■

13.6 広義フーリエ展開と完全規格直交系展開

ここまでは指数関数や三角関数を用いてフーリエ級数展開を行ってきましたが、ここではもう少し一般的な関数列 $f_n(x)$ による展開を考えてみましょう。フーリエ展開と同様の性質を持たせるために、まずは次の定義を与えます。

*3 $\lambda\neq 0$ のときは $R_\lambda(r)=r^l$ とおいて微分方程式に代入すると $l=\pm\lambda$ となります。

関数と関数の内積

定義 13.1 区間 $[-L/2, L/2]$ における関数 $f(x)$ と $g(x)$ の内積 $\langle f|g\rangle$ を次で定める。

$$\langle f|g\rangle \equiv \int_{-L/2}^{L/2} \overline{f(x)} g(x) dx$$

さて、$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{\frac{2\pi i n x}{L}}$ とおくとこれまでの議論から $\langle f_n|f_m\rangle = \delta_{nm}$ となることがわかりますね。ここでは指数関数以外に一般的に $\langle f_n|f_m\rangle$ が成り立つような任意の関数列 $f_n(x)$ を用いて

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n f_n(x)$$

と展開できるとしましょう。[*4]すると c_n は次のように決まることがわかります。

$$c_n = \int_{-L/2}^{L/2} \overline{f_n(x)} f(x) dx = \langle f_n|f\rangle$$

また $\bar{c}_n = \langle f|f_n\rangle$ と書けることもただちに確かめられます。いくぶん形式的ですが、これらの決まり事を用意しておけば、パーセバルの等式もずいぶん簡単に示せるのです。

広義パーセルの等式

定理 13.4 次が成り立つ。

$$\langle f|f\rangle = \sum_n |c_n|^2$$

$$\langle f|f\rangle = \left\langle \sum_n c_n f_n \middle| \sum_m c_m f_m \right\rangle = \sum_n \sum_m \bar{c}_n c_m \underbrace{\langle f_n|f_m\rangle}_{\delta_{nm}} = \sum_n |c_n|^2$$

により簡単に示せます。□

このように $\langle f_n|f_m\rangle = \delta_{nm}$ をみたす関数列 $f_n(x)$ の集まりを**規格直交系**と呼びます。

例題　形式的に次のように書けることを示せ。

$$\sum_n |f_n\rangle \langle f_n| = 1$$

解答　任意の関数 $F(x) = \sum_n F_n f_n(x), G(x) = \sum_n G_n f_n(x)$ [*5]に対し

$$\langle F| \sum_n |f_n\rangle \langle f_n|G\rangle = \langle F|G\rangle$$

[*4] この展開式が一意に決まることを**完全性**と呼びます。
[*5] この展開が一意に決まる（⇔ $f_n(x)$ が完全性を持つ）とします。

が成り立つことを示します。まず

$$\langle F| \sum_n |f_n\rangle \langle f_n|G\rangle = \sum_n \langle F|f_n\rangle \langle f_n|G\rangle = \sum_n \overline{F}_n G_n$$

であり、一方で

$$\langle F|G\rangle = \left\langle \sum_n F_n f_n \middle| \sum_m G_m f_m \right\rangle = \sum_n \sum_m \overline{F}_n G_n \delta_{nm} = \overline{F}_n G_n$$

となり、確かに求めるべき式が得られたことがわかりますね。■

13.7　フーリエ積分

フーリエ変換の準備をします。周期関数を調べるのがフーリエ級数であるなら、フーリエ変換は非周期関数を調べる道具と言えます。周期 L を $L \to \infty$ とすることで周期性を消すことができるからです。$f(x)$ を全領域 $[-\infty, \infty]$ で考える必要があり、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx = M < +\infty \ \ (\text{つまり } M \text{ は有限})$$

と仮定しておきましょう。はじめに、$f(x)$ を周期 L の周期関数とし、フーリエ級数展開 $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2n\pi ix}{L}}$ を用意します。このときフーリエ係数は $c_n = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x)e^{-\frac{2n\pi ix}{L}}dx$ で表されます。これにより $\Delta u = \frac{2\pi}{L}$ とおいて $L \to \infty$ の極限をとると

$$\begin{aligned}
\lim_{L\to\infty} f(x) &= \lim_{L\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2n\pi ix}{L}} \\
&= \lim_{L\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)e^{-\frac{2n\pi it}{L}}dt\right\} e^{-\frac{2n\pi ix}{L}} \\
&= \lim_{L\to\infty, \Delta u\to 0} \sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{+\infty} \left\{\left(\frac{\Delta u}{2\pi}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)e^{-n\Delta u\pi ix}dt\right)e^{-n\Delta uix}\right\}
\end{aligned} \tag{13.5}$$

ここで区分求積[*6] を用いると、

$$\lim_{L\to\infty} f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} du \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iut}dt\right)e^{iux}$$

[*6] 区分求積 (リーマン和) は次の式で表されます。

$$\lim_{\Delta u\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta u F(n\Delta u) = \int_0^{\infty} F(u)du$$

$$\lim_{\Delta u\to 0} \sum_{n=-\infty}^{-1} \Delta u F(n\Delta u) = \int_{-\infty}^{0} F(u)du$$

が得られ、改めて $f(x)$ を非周期関数とすれば次の関係が得られます。

フーリエ積分定理

定理 13.5 任意の $f(x)$ は次のように展開でき、この式を**フーリエ積分**と呼ぶ。

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} du \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iut}dt \right) e^{iux} \tag{13.6}$$

後に現れる「フーリエ変換を逆変換すると元に戻る」性質はこの式に由来します。

例題 $f(x) = \begin{cases} 1 & (-1 \leq x < 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$ のフーリエ積分を考え、次の等式を証明せよ。

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

解答 まず、$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iut}dt = \int_{-1}^{1} e^{-iut}dt = \left[\frac{e^{-iut}}{-iu} \right]_{-1}^{1} = 2\frac{\sin u}{u}$ であることを用いて式 (13.6) に代入すれば $\displaystyle f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin u}{\pi u} e^{-iux} du$ を得ます。両辺に $x = 0$ を代入してやれば $f(0) = 1$ なので

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = \pi$$

となり、$\dfrac{\sin u}{u}$ が偶関数であることから、所望の式を得ます。■

例題 関数 $\displaystyle \delta(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dte^{-itu}$ と任意の $f(u)$ に対して次が成り立つことを示せ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(u)f(u)du = f(0)$$

解答 上式の左辺と右辺を別々に計算します。右辺でフーリエ積分を用います。

$$(\text{左辺}) = \int_{-\infty}^{\infty} du\delta(u)f(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} dte^{-itu}f(u)$$

式 (13.5) で $n \neq 0$ としているのは、$n = 0$ のときのみ

$$|c_0| \to \Big| \lim_{L\to+\infty} \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(t)dt \Big| < \lim_{L\to+\infty} \frac{M}{L} = 0$$

となるためです。

右辺で $f(0)$ をフーリエ積分 (13.6) で展開し

$$(\text{右辺}) = f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} du \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iut} dt \right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-itu} f(u)$$

となり、両辺が一致することがわかります。この $\delta(x)$ はディラックのデルタ関数と呼ばれ、フーリエ変換の項で現れます。$\delta(x)$ は偶関数であることに注意しましょう。■

13.8　演習問題

1　次のシュレディンガー方程式の境界値問題を解け。ただし $\hbar, m, a > 0$ とする。

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi(x,t)$$

$$\psi(0,t) = 0,\ \psi(a,t) = 0,\ \psi(x,0) = \sqrt{\tfrac{2}{a}}\sin^3\left(\tfrac{\pi x}{a}\right)$$

2　次の波動方程式の境界値問題を解け。ただし $c > 0$ とする。

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

$$u(0,t) = u(a,t) = 0,\ u(x,0) = x,\ \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$$

3　完全規格直交系 $f_n(x)$ に対し $\delta(x-x') = \sum_n \overline{f_n(x)} f_n(x')$ と書けることを示せ。

解答

1　$\psi(x,t) = X(x)T(t)$ とおくと、適当な実数 k を用いて

$$i\hbar\frac{1}{T(t)}\frac{\partial T(t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -\frac{\hbar^2}{2m}k^2$$

のようにおけます。これより適当な定数 A, B を用いて

$$T(t) = e^{-it\frac{\hbar k^2}{2m}}, X(x) = A\sin kx + B\cos kx$$

と書け、境界値問題から $B = 0, ka = n\pi$ $(n = 1, 2, \cdots)$ となることがわかります。これより $T(t)X(x)$ の線形結合で $\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-it\frac{\hbar k^2}{2m}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$ と書けることがわかります。この定数 A_n を初期条件から決定しましょう。$t = 0$ を代入して、初期条件と比較し

$$\psi(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\tfrac{n\pi x}{a}\right) = \sqrt{\frac{2}{a}} \times \frac{3\sin(\frac{\pi x}{a}) - \sin(\frac{3\pi x}{a})}{4}$$

から[*7] $A_1 = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{a}}, A_3 = -\frac{1}{4}$ および $n \neq 1,3$ のとき $A_n = 0$ となり、よって

$$\psi(x,t) = \sqrt{\frac{2}{a}}\left(\frac{3}{4}\sin(\tfrac{\pi x}{a})e^{-it\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}} - \frac{1}{4}\sin(\tfrac{3\pi x}{a})e^{-it\frac{9\pi^2\hbar^2}{2ma^2}}\right)$$

が得られます。■ これは量子力学で言う井戸型ポテンシャルの問題です。

2 $u(x,t) = X(x)T(t)$ とおくと $\frac{1}{c^2}\frac{1}{T}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -k^2$（$k$ は実定数）と書くことができ、境界条件から $B = 0, k = \frac{n\pi}{a}$　$(n = 1, 2, \cdots)$ となって $X(x)$ の特解 $X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{a}$ を得ます。これより $T(t)$ も同様に $T_n(t) = \cos ckt = \cos\frac{n\pi ct}{a}$ となり、適当な定数 A_n に対し $X(x)T(t)$ の線形結合を取って

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\tfrac{n\pi x}{a})\cos(\tfrac{n\pi ct}{a})$$

となります。ここで $t = 0$ とし、初期条件と x のフーリエ級数展開（p153 参照）

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}a^2}{n\pi}\sin(\tfrac{2n\pi x}{a})$$

とを比較して $A_{2n-1} = 0$、$A_{2n} = \frac{(-1)^{n-1}a^2}{n\pi}$ とわかり、次の結果を得ます。

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}a^2}{n\pi}\sin(\tfrac{2n\pi x}{a})\cos(\tfrac{2n\pi ct}{a}) \ ■$$

3 任意関数 $g(x) = \sum_n g_n f_n(x)$ に対し $\int_{-\infty}^{\infty}\underset{\sim\sim\sim}{\delta(x-x')}g(x)dx = g(x')$ が成り立つことを用います。

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx\underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{\sum_n \overline{f_n(x)}f_n(x')}g(x) = \sum_n\sum_m g_m f_n(x')\int_{-\infty}^{\infty}dx\overline{f_n(x)}f_m(x)$$

$$= \sum_n\sum_m g_m f_n(x')\delta_{nm} = \sum_n g_n f_n(x') = g(x')$$

となり、波線部を比較して所望の式を得ます。■

[*7] ただし三倍角の公式 $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ を用いました。

第 14 章

フーリエ変換とデルタ関数

フーリエ変換と偏微分方程式を解くテクニックを扱い、デルタ関数をからめてひたすら積分計算を行っていきます。これが後々グリーン関数を扱う際にも役に立ってきます。

フーリエ逆変換を示すために次の性質を満たす**超関数**$\delta(x)$ を準備しておきます。

Dirac(ディラック)のデルタ関数

定義 14.1 $\delta(x)$ は次の性質を満たす。

$$x \neq 0 \text{ のとき、} \delta(x) = 0 \tag{14.1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a) \tag{14.2}$$

超関数についての記述は省きますが、[*1] おおむね計算は普通の関数と一緒です。

デルタ関数の積分表示

定理 14.1 デルタ関数の仮初の表示として、次のような書き方がある。

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}dk$$

この表示がデルタ関数の定義を満たしていることは前章最後の例題で示しましたね。非常に有用な表記であり、フーリエ逆変換の成立を簡単に示すために利用できます。他にも $\rho_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & |x| \leq \varepsilon \\ 0 & |x| > \varepsilon \end{cases}$ や $\rho_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}$、$\rho_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}\varepsilon}\exp\left[-\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)^2\right]$、$\rho_\varepsilon(x) = \dfrac{\sin(x/\varepsilon)}{\pi x}$ などが、$\varepsilon \to 0$ で $\lim_{\varepsilon\to 0}\rho_\varepsilon(x) = \delta(x)$ をみたします。

デルタ関数は定数 1 に、$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dke^{ikx}$ を作用させたものであり、任意の関数 $F(k)$ に同じものを作用させると、ちょうどフーリエ逆変換となります。

---

*1 デルタ関数の定義そのものが任意の関数との組みを積分した形で与えられている点に注意してください。デルタ関数は単独で式に現れているのは、積分を前提とした形式的な場合に限られています。

14.1 フーリエ変換

まずは定義をおさえておきましょう。事実上デルタ関数を整備してあるので逆変換が決まることも示します。

フーリエ変換と逆変換

定理 14.2 $f(x)$ のフーリエ変換 $\mathscr{F}[f(x)] = F(k)$ を定義すると、$F(k)$ のフーリエ逆変換 $\mathscr{F}^{-1}[F(k)] = f(x)$ は次のように決まる。

$$\mathscr{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx \tag{14.3}$$

$$\mathscr{F}^{-1}[F(k)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx}dk \tag{14.4}$$

純粋数学の立場では、$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx$、$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx}dk$ などと書く流儀もありますが、本節では上の定義で説明します。まず $f(x)$ をフーリエ変換して $F(y)$ を求め、$F(y)$ を逆変換すると $f(x)$ に戻ることを示しておきましょう。すなわち

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dy e^{iy\xi}\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)e^{-iyx}$$

を示せばよいわけですが、右辺の積分順序を入れ替え、指数関数の肩を整理してやれば、次のように書くことができます。

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) &= \underline{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)\underline{\int_{-\infty}^{\infty} dy e^{iy(\xi-x)}} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(\xi-x)dx \\ &= f(\xi)\end{aligned}$$

となり、左辺に一致します。下線部をデルタ関数にまとめたことに注意してください。[*2] (デルタ関数は $\delta(x-\xi) = \delta(\xi-x)$ を満たします)

例題 $f(x) = 1$ をフーリエ変換せよ。

解答 $F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}dx$ となり、x を $-x$ に置き換えると $F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}dx = \underline{2\pi\delta(x)}$ を得ます。■

例題 次の $f(x)$ をフーリエ変換せよ。$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$

[*2] このことは、前項のフーリエ積分を用いることと同じですが、このようにデルタ関数を用いた式変形自体も非常に重要です。

解答　$F(k)=\int_{-1}^{1}e^{-ikx}dx=\left[\frac{e^{-ikx}}{-ik}\right]_{-1}^{1}=\frac{2\sin k}{k}$ となります。■

例題　$f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ をフーリエ変換せよ。

解答　$f(x)$ が $1/$(多項式) の形なら、留数定理を使います。詳しくは留数定理の応用の項目を見てください。求めるべきは

$$F(k)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikx}}{x^2+1}dx$$

であり、上半円 $(k<0)$ に $+i$、下半円 $(k>0)$ に $-i$ の、どちらも一位の極を持つので、

$$\begin{aligned}F(k)=2\pi i\mathrm{Res}&=\begin{cases}2\pi ie^{k} & (k<0)\\ 2\pi ie^{-k} & (k>0)\end{cases}\\ &=2\pi ie^{-|k|}\end{aligned}$$

として答えを得ることが出来ます。■

例題　ガウス関数 e^{-x^2} をフーリエ変換せよ。

解答　ガウス積分を用います。

$$F(k)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\cdot e^{-ikx}dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x+\frac{ik}{2})^2-k^2/4}dx=e^{-k^2/4}\int_{-\infty+ik/2}^{\infty+ik/2}e^{-z^2}dz=\sqrt{\pi}e$$

となりガウス関数のフーリエ変換はガウス関数になることがわかります。(途中計算で複素平面の経路を通っていることに注意 (計算上はただのガウス積分です)。) ■

14.2　諸処の公式

収束に関する細かいことは省きます。これらは微分方程式を解く段階で必要になります。本項では $F(k)=\mathscr{F}[f(x)]$、$G(k)=\mathscr{F}[g(x)]$ とします。

微分のフーリエ変換

定理 14.3 次が成り立つ。

$$\mathscr{F}[\tfrac{d^n}{dx^n}f(x)]=(ik)^nF(k)$$

$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{d^k}{dx^k}f(x)e^{-ikx}=0$　(k は n 以下で 0 以上の整数) とすれば部分積分で示せ、

$$\mathscr{F}[\frac{d}{dx}f(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}f'(x)e^{-ikx}dx=[f(x)e^{-ikx}]_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}f(x)(-ik)e^{-ik}dx$$

で、右辺第一項が 0 になり、これを繰り返せば定理を示すことができます。□

積分のフーリエ変換

定理 14.4 次が成り立つ。

$$\mathscr{F}\Big[\int_{-\infty}^{x} f(t)dt\Big] = \frac{1}{ik}F(k)$$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 0$ が成立すると仮定して、部分積分を使えば証明できます。

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\Big[\int_{-\infty}^{x} f(t)dt\Big] &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx}\left(\int_{-\infty}^{x} f(t)dt\right)\\ &= \left[\int_{-\infty}^{x} f(t)dt\frac{e^{-ikx}}{-ik}\right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{ik}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx\end{aligned}$$

において右辺第一項が 0 になるので、定理を示せます。□

変数置換（拡大縮小）

定理 14.5 次が成り立つ。

$$\mathscr{F}[f(ax)] = \frac{1}{|a|}F(k/a)$$

これは $ax = y$ と置換して積分すればケリがつきます。ただし a の正負について場合分けしなければなりません。($a < 0$ なら $(x|-\infty \to \infty) \to (y|\infty \to -\infty)$ となることに注意！)□

合成積（たたみこみ）のフーリエ変換

定理 14.6 次が成り立つ。

$$\mathscr{F}[f * g(x)] \equiv \mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy\right] = F(k)G(k)$$

右辺から左辺になることを示します。以下において $x + t = y$ と置けば左辺と等しくなります。

$$F(k)G(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}f(x)dx\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikt}g(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} dx\int_{-\infty}^{\infty} dtf(x)g(t)e^{-ik(x+t)}$$

また、これらのほかにも次の公式たちが成立していますが、証明は省きます。

各種公式

定理 14.7 次が成り立つ。

k の移動　$\mathscr{F}[e^{iax}f(x)] = F(k-a)$　(14.5)

x の移動　$\mathscr{F}[f(x-a)] = e^{-iak}F(k)$　(14.6)

積の変換　$\mathscr{F}[f(x)g(x)] = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)G(k-\xi)d\xi$　(14.7)

14.3 Planchrel の等式とその応用

パーセバルの等式のフーリエ変換バージョンです。次の定理が成立します。[*3]

Planchrel(プランシュレル)の関係

$\mathscr{F}[f(x)] = F(k)$ とするとき、以下の等式が成立する。

定理 14.8

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx|f(x)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk|F(k)|^2$$

デルタ関数を使って簡単に証明します。フーリエ変換の定義に従い、

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx,\ \overline{F(k)} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(y)}e^{iky}dy$$

が成立します。$\overline{f(y)}$ は $f(y)$ の複素共役です。ここで両者を掛け合わせ、$\int_{-\infty}^{\infty} dk$ を作用させると、

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dk|F(k)|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)e^{-ikx} \int_{-\infty}^{\infty} dy\overline{f(y)}e^{iky} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \int_{-\infty}^{\infty} dy\overline{f(y)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(y-x)}}_{2\pi\delta(y-x)} \\
&= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dy\overline{f(y)}\delta(y-x)}_{\overline{f(x)}} = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{f(x)}dx \\
&= 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} dx|f(x)|^2
\end{aligned}$$

となり、証明できました。□

例題 次の積分を求めよ。$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$

解答 164 ページにおいて $f(x) = 1(|x| < 1), 0(|x| > 1)$ のフーリエ変換が $F(k) = \dfrac{2\sin k}{k}$ であったことを利用します。Planchrel の等式により

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{2\sin k}{k}\right|^2 dk = \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2 dx = \int_{-1}^{1} dx = 2$$

*3 素っ気なく提示されていますが、例えば量子力学では、運動量空間の波動関数と座標空間の波動関数は、ノルムを取ると等価である(確率が保存する)ことを表します。あるいは物理を離れて、ひとつの道具として、ある種の積分公式を示す際に有用なものと見ることもできます。

となるので、$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 k}{k^2}dk=\pi$ を得ます。□

14.4 偏微分方程式とフーリエ変換

まずは具体問題に当たってみましょう。鍵になるのは**畳み込み**です。

例題 次の熱方程式を解け。

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t),\ u(x,0)=f(x)$$

解答 まず $f(x)$ のフーリエ変換を $F(k)$ とし、$u(x,t)$ のフーリエ変換を $U(k,t)$ とします。熱方程式両辺をフーリエ変換すると、**微分のフーリエ変換**の公式から

$$\frac{\partial}{\partial t}U(k,t)=-k^2U(k,t)$$

となり、これを変数分離で解くと $U(k,t)=F(k)e^{-k^2t}$ となります。[*4] これを逆変換して $u(x,t)=\mathscr{F}^{-1}[F(k)e^{-k^2t}]$ を計算すれば $u(x,t)$ が得られます。t を定数として $G(k)=e^{-k^2t}$ の逆変換を $g(x)$ とおくと $g(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$ であり、**畳み込み**の公式から

$$\begin{aligned}u(x,t)=\mathscr{F}^{-1}[F(k)G(k)]&=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)g(x-y)dy\\&=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4t}\right]dy\end{aligned}$$

が得られます。■

例題 次の定常状態のシュレディンガー方程式を解け。$\varepsilon>0$ とする。

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}u(x)-\delta(x)u(x)=-2\epsilon^2u(x)$$

解答 $u(x)$ のフーリエ変換を $U(k)$ とおくと、**微分のフーリエ変換**の公式から

$$\frac{k^2}{2}U(k)-u(0)=-2\epsilon^2U(k)\Rightarrow U(k)=\frac{2u(0)}{k^2+4\epsilon^2}$$

となり、これを逆変換すると

$$u(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2u(0)}{k^2+4\epsilon^2}e^{ikx}dk=\frac{u(0)}{2\epsilon}e^{-2\epsilon|x|}$$

が得られます（留数定理を用いました）。さらに両辺で $x=0$ とすると $\epsilon=\dfrac{1}{2}$ が得られ $u(x)=u(0)e^{-|x|}$ となります。■

[*4] $t=0$ とすると $U(k,0)=F(k)$ となることに注意。

14.5　デルタ関数の再考

デルタ関数の有名な性質として、次のようなものが挙げられます。

デルタ関数の性質

デルタ関数が次の式で定められるとする。ただし $f(x)$ は任意の関数である。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a)$$

定理 14.9 このとき Dirac のデルタ関数は、以下の性質を満たす。

(1)　$\delta(x) = \delta(-x)$
(2)　$\delta'(x) = -\delta'(-x)$
(3)　$x\delta(x) = 0$
(4)　$x\delta'(x) = -\delta(x)$
(5)　$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(a-x)\delta(x-b)dx = \delta(a-b)$
(6)　x_i は $x : [a,b]$ の区間における $g(x)=0$ の根であり、$g'(x_i) \neq 0$ ならば以下が成立する。

$$\int_a^b f(x)\delta\big(g(x)\big)dx = \sum_i \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|} \tag{14.8}$$

(1) と (6) のみ示しておきます。(2) から (5) は (1) とほぼ同じです。デルタ関数に関する恒等式の証明は、「任意の関数 $f(x)$ を用いて $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(x)dx = 0$ を満たすとき、$G(x)=0$ である」という事実を用いて間接的に示すものが多く、(1) はその典型です。まず任意の関数 $f(x)$, $f(-x)$ について、デルタ関数の定義式より

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0), \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(-x)\delta(x) = f(0)$$

が成立します。上第一式と、第二式で $x \to -x$ と書き換えた式

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(-x)dx = f(0)$$

を辺々引くと

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\Big(\delta(x)-\delta(-x)\Big)dx = 0$$

となり、$\delta(x)$ と $\delta(-x)$ が恒等的に等しいことがわかります。

次に (6) を示します。$g'(x) = dg(x)/dx > 0$ として、x_i を $g(x)$ のゼロ点、ε を十

分小さい正数とします。

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\delta(g(x))dx &= \sum_i \int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} f(x)\delta(g(x))dx \\ &= \sum_i \int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} f(x(g))\left(\frac{dx}{dg}\right)\delta(g)dg \\ &= \sum_i f(x_i)\left(\frac{dx}{dg}\right)\bigg|_{x=x_i} = \sum_i \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|} \quad (\because g'>0)\end{aligned}$$

ここで $g'(x) < 0$ のときは[*5]

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\delta(g(x))dx &= \sum_i \int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} f(x)\delta(g(x))dx \\ &= \sum_i \int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} f(x(g))\big(g'(x)\big)^{-1}\delta(g)dg \\ &= \sum_i \int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} f(x(g))\big(-|g'(x)|\big)^{-1}\delta(g)dg \\ &= \sum_i \int_{x_i+\varepsilon}^{x_i-\varepsilon} f(x(g))\big(|g'(x)|\big)^{-1}\delta(g)dg = \sum_i \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|}\end{aligned}$$

となり、所望の式を得ます。□ この応用として、以下の問題を解いて見ましょう。

例題　次の積分を求めよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{x^2+1}\delta(x^4-1)dx$$

解答　まず $x^4-1=0$ の根は $x=\pm1,\pm i$ であり、積分区間 $[-\infty,\ \infty]$ の中にあるのは $-1,\ +1$ だけなので、これらについてのみ和をとります。$x_i=-1,1$ とし、$|x_i|=1$ であることに気をつけて

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{x^2+1}\delta(x^4-1)dx = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{(x^4-1)'}\bigg|_{x=x_i} \times \frac{e^{ikx_i}}{x_i^2+1} = \frac{1}{4}\frac{e^{ik}}{1^2+1} + \frac{1}{4}\frac{e^{ik(-1)}}{(-1)^2+1} = \frac{1}{4}\cos$$

を得ます。■

例題　次の積分を求めよ。

$$\int_0^{\infty} \delta(\cos x)e^{-x}\sin x dx$$

[*5] x ではなく、g が増加するように積分区間を指定することに注意しましょう。

解答　$\cos x = 0$ の根は $x = \dfrac{2n+1}{2}\pi$ (n は整数) であり、積分区間 $[0,\infty]$ の中にあるのは $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \cdots$ すなわち $x_n = \dfrac{2n+1}{2}\pi$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ です。この x_n について和を取ります。

$$\int_0^{\infty} \delta(\cos x) e^{-x} \sin x dx = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-x_n} \sin x_n$$
$$= e^{-\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-e^{-\pi})^n = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{1+e^{-\pi}} = \underline{\frac{1}{2\cosh\frac{\pi}{2}}}$$

として答えが得られます。■

14.6　3 次元に拡張されたデルタ関数

3 次元ベクトル $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$　$(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ を変数とするデルタ関数 $\delta(\boldsymbol{r})$ *6 について扱います。

3 次元デルタ関数の定義

> **定義 14.2** 3 次元デルタ関数 $\delta(\boldsymbol{r})$ は次の式によって定義される。
>
> $$\delta(\boldsymbol{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$$
>
> $$\int_V \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) f(\boldsymbol{r}) d^3\boldsymbol{r} = f(\boldsymbol{r}_0)(\boldsymbol{r}_0 \in V),\ \delta(\boldsymbol{r}) = 0 \quad (\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{0})$$

また、これによって定義されるデルタ関数は次のように表示されることが多いです。

3 次元デルタ関数の積分表示

> **定理 14.10** 3 次元デルタ関数 $\delta(\boldsymbol{r})$ は次の積分表示で表すことができる。
>
> $$\delta(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{V_k} \exp(i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}) d^3\boldsymbol{k}$$
> $$\equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_{-\infty}^{\infty} dk_z e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}$$

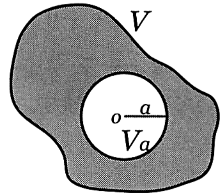
以上が拡張されたデルタ関数の定義と表示法であり、1 次元デルタ関数の拡張に過ぎません。しかし、以下に掲げる定理は非常に重要なものです。

ラプラシアンとデルタ関数

> **定理 14.11** 3 次元ベクトル $\boldsymbol{r}$ と、これを変数に持つ $\delta(\boldsymbol{r})$ について、以下の関係が成立する。
>
> $$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}) \quad \boldsymbol{r} = (x, y, z) \tag{14.9}$$

---

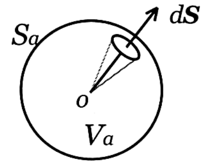
*6 一般には $\delta^3(\boldsymbol{r})$ と書く場合もあります。



次のように証明します。まず、ベクトル解析の内容を踏まえて $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ および、$-\nabla \dfrac{1}{r} = \dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ であることを用いれば、証明すべきことは

$$\nabla \cdot \left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \right) = 4\pi\delta(\boldsymbol{r})$$

であることがわかります。まず、$\boldsymbol{r} \neq 0$ のとき、



$$\nabla \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{3}{r^3} - \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = 0 \qquad (14.10)$$

を確認しておきます。ここで、$\boldsymbol{r} = 0$ を中心として半径 a の球で囲った領域 V_a と、V_a を含む任意領域 V について、領域 V における $\nabla \cdot \dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ の積分を考えます。V_a の表面を S_a で表し、この微小面積素を $d\boldsymbol{S}$ で表すとき、式 (14.10) から、

$$\int_V \nabla \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} dV = \int_{V_a} \nabla \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} dV$$

であり、$d\boldsymbol{S} = \dfrac{\boldsymbol{r}}{r} dS$ であることと、ガウスの発散定理を用いれば

$$\int_{V_a} \nabla \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} dV = \int_{S_a} \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_{S_a} \frac{\boldsymbol{r}}{a^3} \cdot \underbrace{d\boldsymbol{S}}_{\frac{\boldsymbol{r}}{r} dS} = \int_{S_a} \frac{dS}{a^2} = \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi$$

を得ます。a をどんなに小さくとってもこの式は成立し、

$$\int_V \nabla \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} dV = 4\pi \quad \left(= \int_V 4\pi\delta(\boldsymbol{r}) dV \right)$$

すなわち $\nabla \cdot \dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3} = 4\pi\delta(\boldsymbol{r})$ が成り立つことがわかり、これで所望の式が示せました。[*7]

14.7　3 次元に拡張されたフーリエ変換

デルタ関数同様、フーリエ変換も 3 次元に拡張することができます。

3 次元フーリエ変換

定理 14.12 $f(\boldsymbol{r})$ の 3 次元フーリエ変換 $F(\boldsymbol{k})$、逆変換は次のように表される。

$$F(\boldsymbol{k}) = \iiint_V f(\boldsymbol{r}) \exp(-i\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{k}) d^3\boldsymbol{r}$$

$$f(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_V F(\boldsymbol{k}) \exp(i\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{k}) d^3\boldsymbol{k}$$

ただし V は 3 次元空間全体を指す。$d^3\boldsymbol{r}$ の代わりに dV とも書く。

具体的に計算してみましょう。$d^3\boldsymbol{r} = dxdydz = r^2 \sin\theta drd\theta d\phi$ を用います。

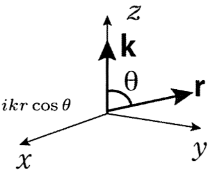
---

*7 蛇足ですが、これを少し一般化して、$\nabla \cdot \dfrac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} = 4\pi\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')$ も成立します。

次の関数を 3 次元フーリエ変換せよ。

$$\frac{\sin r}{r} \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

図のように、任意のベクトル $\boldsymbol{r}$ が、ベクトル $\boldsymbol{k}$ となす角を θ とします。このとき、$k = |\boldsymbol{k}|$ とおけば $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{k} = rk\cos\theta$ と書け、この座標系の下で積分すると、



$$\iiint_V d^3\boldsymbol{r} \frac{\sin r}{r} e^{-i\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{k}} = \int_0^\infty drr^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\sin r}{r} e^{-ikr\cos\theta}$$

となり、$X = \cos\theta$ とおくと、

θ	$0 \to \pi$
X	$1 \to -1$

であり、

$d\theta = \dfrac{dX}{-\sin\theta}$ と書けるから、ϕ、$\theta(X)$ の順に積分して

$$\int_0^\infty drr^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\sin r}{r} e^{-ikr\cos\theta} = 2\pi \int_0^\infty drr \sin r \int_{-1}^1 dX e^{-ikrX}$$

$$= 2\pi \int_0^\infty drr \sin r \frac{e^{-ikr} - e^{ikr}}{-ikr} = \frac{2\pi}{k} \int_0^\infty dr \frac{e^{ir} - e^{-ir}}{2i} \cdot \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{i}$$

$$= -\frac{\pi}{k} \int_0^\infty dr \left[e^{ir(k+1)} + e^{-ir(k+1)} - e^{ir(1-k)} - e^{-ir(1-k)} \right]$$

$$= -\frac{\pi}{k} \left\{ \int_{-\infty}^\infty dre^{ir(k+1)} - \int_{-\infty}^\infty dre^{ir(1-k)} \right\} = \frac{-2\pi^2}{k} \Big(\delta(k+1) - \delta(1-k) \Big)$$

$$= \frac{2\pi^2}{|\boldsymbol{k}|} \Big(\delta(|\boldsymbol{k}| - 1) - \delta(|\boldsymbol{k}| + 1) \Big) = \frac{2\pi^2}{|\boldsymbol{k}|} \delta(|\boldsymbol{k}| - 1)$$

これにより、フーリエ変換が求められました。*8

14.8　演習問題

1　ヘヴィサイドステップ関数 $H(x)$ を次で定める：$H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

このとき、$H(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x \delta(x) dx$ を示せ。

2　$\dfrac{1}{r}\delta(r^2 - a^2)$ を 3 次元フーリエ変換せよ。$a > 0$ とする。

---

*8　5 つめの = の計算で、はじめの 2 項を

$$\int_0^\infty e^{ir(k+1)} dr + \int_0^\infty e^{-ir(k+1)} dr = \int_0^\infty e^{ir(k+1)} dr + \int_{-\infty}^0 e^{ir(k+1)} dr = \int_{-\infty}^\infty e^{ir(k+1)} dr$$

としてまとめています。終わりの 2 項も同様です。また、最終式右辺 6 段目では、δ 関数が偶関数であることを用いています。最後に $k > 0$ のとき $\delta(k+1) = 0$ となることを用いました。

3　$f(x)$ のフーリエ変換を $F(k)$ とおくと次が成り立つことを示せ。$L>0$ とする。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nL) = \frac{1}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2n\pi}{L}\right) \quad \textbf{(ポアソンの和公式)}$$

解答

1　デルタ関数の定義「$x \neq 0$ のとき $\delta(x)=0$」により、デルタ関数の性質

$$a<0<b \Rightarrow \int_a^b \delta(x)dx = 1$$

が言え、これより

$$\int_{-\infty}^{x} \delta(x)dx = \begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$

が言えます。一方で $H'(x)=\delta(x)$ が成り立ちます。

2　求めるべき関数を $F(k)$ とおき、極座標変換と $\delta(r^2-a^2)=\dfrac{\delta(r-a)}{2r}$ を用いて

$$\begin{aligned} F(k) &= \iiint \frac{1}{r}\delta(r^2-a^2)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}d^3\boldsymbol{r} \\ &= \int_0^{\infty} drr^2 \int_{-1}^{1} d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{2r^2}\delta(r-a)e^{-ikr\cos\theta} \\ &= 2\pi\int_0^{\infty} drr^2 \frac{\delta(r-a)}{2r^2}\frac{\sin kr}{kr} = \frac{2\pi\sin ka}{ka} \end{aligned}$$

となります。

3　$\Phi(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-nL)$ を区間 $[-\frac{L}{2},\frac{L}{2}]$ でフーリエ級数展開し、$\Phi(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2in\pi x}{L}}$ とすると、展開係数が $c_n = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L/2}^{L/2} dx e^{-\frac{2in\pi x}{L}}\Phi(x) = \dfrac{1}{L}$ と決まります。ここで $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx\Phi(x)f(x)$ を計算することでポアソンの和公式を得ます。■　例えば $f(x)=\dfrac{1}{x^2+a^2}$ と選ぶと、和公式から

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{a}\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}e^{-2n\pi a}\right)$$

となり、$\pi a \to iz$ とおくことで

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n\pi}+\frac{1}{z+n\pi}\right)$$

（コタンジェントの特異点展開）が得られます。

第 15 章

ラプラス変換と常微分方程式

かつてヘヴィサイドに始まった演算子法はラプラス変換の理論によって正当化されました。これは変数 t の常微分方程式を解くための技巧理論で、ラプラス変換は次のように定義されます。

ラプラス変換の定義

定義 15.1 区分的に連続な $f(t)$ について、次の積分

$$F(s) = \mathscr{L}[f(t)] := \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{15.1}$$

が収束するとき、$F(s)$ を $f(t)$ の**ラプラス変換**という。s は複素変数で、$F(s)$ が収束する
範囲 $(\sigma_c < \Re[s])$ に存在するものとする。(σ_c を**収束横座標**という)

ラプラス変換には収束に関するうるさい束りがつきますが、本節では細かい箇所を省き、なるべく「方程式を解く」ことに主眼をおきます。

例題 (1)$\cos\omega t$ (2)t^n (n は自然数) (3)e^{at} $(a > 0)$ のラプラス変換を求めよ。

解答

(1) $\cos\omega t \to e^{i\omega t}$ と直して積分します。

$$\int_0^\infty e^{(i\omega-s)t}dt = \frac{1}{i\omega - s}\left[e^{(i\omega-s)t}\right]_0^\infty = \frac{1}{s-i\omega} \quad (\text{収束するように}\Re[s] > 0 \text{とする}$$
$$= \frac{s+i\omega}{s^2+\omega^2}$$

の実部を取って[*1] $\mathscr{L}[\cos(\omega t)] = \dfrac{s}{s^2+\omega^2}$ を得ます。

[*1] s が複素数なのでこの表記は本来正しくないですが、s を正の実数だと思っていったん計算しておき、後で s を複素数だとしてやれば良いでしょう。

(2)　$I_n = \displaystyle\int_0^\infty t^n e^{-st} dt$ とおくと、部分積分により

$$I_n = \left[\frac{-1}{s}e^{-st}t^n\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{-1}{s}e^{-st}nt^{n-1}dt = 0 + \frac{n}{s}I_{n-1} \qquad (\Re[s] > 0 \text{ とする})$$

となるので $I_n = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$ が得られます。

(3)　単純に積分して求めます。

$$\int_0^\infty e^{(a-s)t}dt = \frac{1}{a-s}\left[e^{(a-s)t}\right]_0^\infty = \frac{1}{s-a} \qquad (\Re[s] > a \text{ とする})$$

$f(t)$ とそのラプラス変換 $F(s)$ について、以下の表を記しておきます。

ラプラス変換表

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$	$\cosh\omega t$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}$	$\frac{1}{(s-a)^n}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$	$\sinh\omega t$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$	$t\cos at$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$e^{bt}\sin at$	$\frac{a}{(s-b)^2+a^2}$	$t\sin at$	$\frac{2sa}{(s^2+a^2)^2}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$e^{bt}\cos at$	$\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$	$\delta(t)$	1

次にラプラス変換の諸公式についておさえておきます。ラプラス変換した後、これを元に戻す逆変換は難しいので、これら公式 (および上のリスト) を使って逆変換を行うためです。(もちろん逆変換を求める方法は後で扱います)

15.1　いくつかの諸公式

(収束性にこだわらなければ) どれも証明自体は難しくありません。これらの公式は道具として使われるものであって、具体的な問題で要求されるごとに手になじませていってください。いきなり覚える必要はありません。

微分のラプラス変換

定理 15.1 次が成り立つ。

$$\mathscr{L}[f^{(n)}(t)] = s^n\mathscr{L}[f(t)] - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{n-1}(0)$$

特に、$n = 1, 2$ では次のようになる。

$$\mathscr{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0),\ \mathscr{L}[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$\int_0^\infty e^{-st}f'(t)dt = [e^{-st}f(t)]_0^\infty - \int_0^\infty (-s)e^{-st}f(t)dt = -f(0) + sF(s)$$

のように、部分積分を繰り返して導くことができます。逆に積分については次の通り。

積分のラプラス変換

定理 15.2 次が成り立つ。

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}F(s)$$

やはり部分積分を用います。

$$(\text{左辺}) = \int_0^\infty dte^{-st}\int_0^t f(\tau)d\tau = \left[\frac{-e^{-st}}{s}\int_0^\infty f(\tau)d\tau\right]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

ここで第 1 項が 0 に収束するので定理を得ます。

場合分け関数のラプラス変換

定理 15.3 ヘヴィサイドの階段(ステップ)関数

$$H(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t > 0) \end{cases}$$

に対して、次の関係が成立する。ただし $a > 0$.

$$\mathscr{L}[f(t-a)H(t-a)] = e^{-as}F(s) \tag{15.2}$$

$t - a = \tau$ とおきかえます。

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \int_{-a}^\infty H(\tau)f(\tau)e^{-s(a+\tau)}d\tau \\ &= e^{-sa}\int_{-a}^0 \underline{H(\tau)}f(\tau)e^{-s\tau}d\tau + e^{-sa}\int_0^\infty H(\tau)f(\tau)e^{-s\tau}d\tau\end{aligned}$$

$H(t)$ の定義より下線部は 0、波線部は 1 となり、ラプラス変換の定義から上の定理を得ます。

合成積(コンボリューション)(畳み込み積分)

定理 15.4 $f(t)$ と $g(t)$ の**合成積**を

$$f * g(t) := \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

で定義するとき、次の関係が成立する。ただし $\mathscr{L}[f] = F, \mathscr{L}[g] = G$ とする。

$$\mathscr{L}[f * g(t)] = \mathscr{L}[f]\mathscr{L}[g] = F(s)G(s)$$

フーリエ変換でも使う次の変換を考えます。中辺で $z = x - y$ とおいていることに

注意。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy u(x-y)v(y)e^{-sx} = \int_{-\infty}^{\infty} dz u(z) \int_{-\infty}^{\infty} dy v(y)e^{-s(z+y)}$$
$$= \left\{\int_{-\infty}^{\infty} dz u(z)e^{-sz}\right\}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} dy v(y)e^{-sy}\right\}$$

前ページにも現れたヘヴィサイドの階段関数 $H(x)$ を使って $u(x) = H(x)f(x)$、$v(y) = H(y)g(y)$ とおけば定理を示すことができます。

これら以外にも、以下のような関係が成立しますが証明は省略します。上の定理たちの導出を参考にしてください。

ラプラス変換の諸公式

次のそれぞれの関係が成立する。

微分の逆変換　$F'(s) = \mathscr{L}[-tf(t)]$　　**移動の逆変換**　$F(s-a) = \mathscr{L}[e^{at}f(t)]$
積分の逆変換　$\int_s^{\infty} F(k)dk = \mathscr{L}[\frac{f(t)}{t}]$　　**逆変換の拡大**　$F(as) = \mathscr{L}[\frac{1}{a}f(\frac{t}{a})]$

説明なしに「逆変換」という言葉を使いましたが、ラプラス逆変換は次のように定義されます。

ラプラス逆変換

定義 15.2 $F(s)$ を $f(t)$ に戻す (積分) 変換をラプラス逆変換と呼び、次で記述する。

$$\mathscr{L}^{-1}[F(t)] = f(t)$$

例題

(1)　$F(s) = \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)}$ のラプラス逆変換を求めよ。

(2)　$G(s) = \dfrac{1}{s^2(s+1)}$ のラプラス逆変換 $g(t)$ を求めよ。

(3)　$F(s) = \dfrac{s}{(s^2+1)(s+1)^2}$ のラプラス逆変換を求めよ。

解答

(1)　部分分数分解して $\dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \dfrac{2}{s+1} - \dfrac{1}{s+2}$ とし、p176 のラプラス変換表 (あるいは前の例題 (3) の結果) を参照し、$\mathscr{L}[e^{at}] = \dfrac{1}{s-a}$ となるから、

$$F(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2} = \mathscr{L}[2e^{-t}] - \mathscr{L}[e^{-2t}] = \mathscr{L}[2e^{-t} - e^{-2t}]$$

より、$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = 2e^{-t} - e^{-2t}$ を得ます。

(2)　$G(s) = \dfrac{1}{s}\left(\dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s+1}\right) = \dfrac{1}{s^2} - \left(\dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s+1}\right) = \mathscr{L}[t] - \mathscr{L}[1] + \mathscr{L}[e^{-t}] =$

$\mathscr{L}[t-1+e^{-t}]$ として、$\mathscr{L}^{-1}[G(s)]=t-1+e^{-t}$ を得ます。

別解 $F(s)=\dfrac{1}{s(s+1)}$、$\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=f(t)$ とし、**積分のラプラス変換**の公式

$$\frac{1}{s}F(s)=\mathscr{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right]$$

を用います。部分分数分解により $\dfrac{1}{s(s+1)}=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+1}$ であり、変換表から

$$F(s)=\mathscr{L}[1]-\mathscr{L}[e^{-t}]=\mathscr{L}[1-e^{-1}]$$

により $f(t)=1-e^{-t}$ を得ます。最後に

$$G(s)=\frac{1}{s}F(s)=\mathscr{L}\left[\int_0^t(1-e^{-\tau})d\tau\right]=\mathscr{L}[e^{-t}-1+t]$$

と書けるから $\mathscr{L}^{-1}[G(s)]=e^{-t}-1+t$ を得ます。

(3) 部分分数分解とラプラス変換表により、

$$F(s)=\frac{1}{2}\frac{1}{s^2+1}-\frac{1}{2(s+1)^2}=\frac{1}{2}\mathscr{L}[\sin t]-\frac{1}{2}\mathscr{L}[te^{-t}]=\mathscr{L}\left[\frac{\sin t-te^{-t}}{2}\right]$$

と書けるから、求めるべき逆変換は $\dfrac{\sin t-te^{-t}}{2}$ になります。■

このように部分分数分解とラプラス変換表を使えば逆変換を求めることができます。次項でラプラス逆変換を定式化しますが、やや難しいので、表を見ながら (あるいは主要なラプラス変換を覚えて) 逆変換するのも良いでしょう。

15.2 ラプラス逆変換の定式化

フーリエ変換同様、デルタ関数によりラプラス変換の逆変換を定式化できます。

ラプラス逆変換（Bromwich（ブロムウィッチ）積分）

定理 15.5 $F(s)$ のラプラス逆変換 $f(t)$ は次のように定式化できる。

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}F(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(s)e^{st}ds\quad(\sigma_c<\sigma)$$

デルタ関数を使えば簡単に示せます。[*2] もう一歩踏み込んで複素積分に書き換えます。

[*2] $s=\sigma+iu$ とおいて置換積分すると

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{st'}}{2\pi i}F(s)ds=\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{st'}}{2\pi i}\int_0^\infty f(t)e^{-ts}dt=\int_0^\infty dtf(t)\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}ds\frac{e^{s(t'-t)}}{2\pi i}$$
$$=\int_0^\infty dtf(t)e^{\sigma(t'-t)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iu(t'-t)}}{2\pi}du=\int_0^\infty f(t)e^{\sigma(t'-t)}\delta(t'-t)dt=f(t')$$

となって所望の式を得ます。

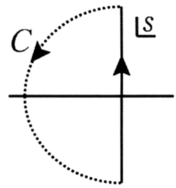
留数とラプラス逆変換

定理 15.6 $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ が s(複素) 平面内に $\Re(s) < \sigma_c$ の領域でローラン展開不能な特異点を持たず、定数 M, k について、$F(s) \leq \dfrac{M}{|s|^k}$ ならば

$$f(t) = \sum \mathrm{Res}_n$$

が成立する。ただし Res_n は $F(s)e^{st}$ の極 s_n に対する留数である。

収束横座標 σ に対し図のように下から上へ突き抜ける経路で積分すればラプラス逆変換が得られますが、これに経路 C を加えて周回積分とします。



$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)e^{st}ds = \frac{1}{2\pi i}\oint F(s)e^{st}ds - \frac{1}{2\pi i}\int_C F(s)e^{st}ds$$

右辺第二項はジョルダンの補助定理から 0 となり、主張が示せます。□

例題　次の関数をそれぞれラプラス逆変換せよ。
(1)$\dfrac{1}{s}$　(2)$\dfrac{1}{s^2+1}$　(3)$\dfrac{s+3}{(s-1)(s^2-2s+5)}$

解答

(1)　$s = 0$ が 1 位の極なので留数は 1 です。つまり $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s}\right] = 1$ となり、p175 の表に合致します。

(2)　極は $s = \pm i$ の 2 つでどちらも 1 位です。それぞれの留数は

$$\mathrm{Res}(i) = \lim_{s\to i}\frac{e^{st}}{(s^2+1)'} = \frac{1}{2i}e^{it}\ ,\quad \mathrm{Res}(-i) = \lim_{s\to -i}\frac{e^{st}}{(s^2+1)'} = \frac{1}{-2i}e^{-it}$$

となり、和を取って $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2+1}\right] = \dfrac{e^{it}-e^{-it}}{2i} = \sin t$ が得られ、やはり変換表に合致します。

(3)　極は $s = 1, 1+2i, 1-2i$ の 3 つで全て 1 位です。これらについて留数を取ると、

$$\mathrm{Res}(1) = \lim_{s\to 1}\frac{(s+3)e^{st}}{\{(s-1)(s^2-2s+5)\}'} = \lim_{s\to 1}\frac{(s+3)e^{st}}{(s^2-2s+5)+2(s-1)^2} = e^t$$

$$\mathrm{Res}(1+2i) = \lim_{s\to 1+2i}\frac{(s+3)e^{st}}{(s^2-2s+5)+2(s-1)^2} = \frac{4+2i}{-8}e^te^{2it}$$

$$\mathrm{Res}(1-2i) = \lim_{s\to 1-2i}\frac{(s+3)e^{st}}{(s^2-2s+5)+2(s-1)^2} = \frac{4-2i}{-8}e^te^{-2it}$$

となるので、それぞれ和を取って $e^t - e^t\cos 2t + \dfrac{1}{2}e^t\sin 2t$ が求めるべきラプラス逆変換になります。■

このように、留数定理を知っていれば自前の変換表無しで逆変換を求めることができます。次項ではラプラス変換と逆変換を使って、常微分方程式を解くことになります。

15.3　常微分方程式を解く

戦略は次のとおりです。

戦略：線形方程式を解く手法

0. 求める関数 $f(t)$ について方程式を作る。
1. 方程式を両辺ラプラス変換する。
2. $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ を求める。
3. $F(s)$ をラプラス逆変換する。

例題　次の方程式を解け。ただし f' は $\dfrac{df}{dt}$ を表すものとする。

$$f''(t) - 3f'(t) + 2f(t) = t \quad (f(0) = 0, f'(0) = 0)$$

解答　まず両辺をラプラス変換します。$\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$ として、**微分のラプラス変換**の公式を使えば

$$\begin{aligned}(\text{与式左辺のラプラス変換}) &= (s^2F - sf(0) - f(0)) - 3(sF - s(0)) + 2F \\ &= (s^2 - 3s + 2)F(s)\end{aligned}$$

および

$$(\text{与式右辺のラプラス変換}) = \int_0^\infty te^{-st}dt = \frac{1}{s^2}$$

となるから、これから $F(s)$ を求めると $F(s) = \dfrac{1}{s^2(s^2 - 3s + 2)}$ を得ることができます。

(留数から求める場合)　$s = 0$ が 2 位の極、$s = 1, 2$ がそれぞれ 1 位の極であり、それぞれの留数は $F' = \dfrac{dF}{ds}$ として

$$\mathrm{Res}(0) = \lim_{s\to 0}\left\{\frac{e^{st}}{s^2 - 3s + 2}\right\}' = \lim_{s\to 0}\frac{te^{st}(s^2 - 3s + 2) - e^{st}(2s - 3)}{(s^2 - 3s + 2)^2} = \frac{1}{2}t + \frac{3}{4}$$

$$\mathrm{Res}(1) = \lim_{s\to 1}\frac{e^{st}}{\{s^2(s^2 - 3s + 2)\}'} = \lim_{s\to 1}\frac{e^{st}}{2s(s^2 - 3s + 2) + s^2(2s - 3)} = -e^t$$

$$\mathrm{Res}(2) = \lim_{s\to 2}\frac{e^{st}}{2s(s^2 - 3s + 2) + s^2(2s - 3)} = \frac{1}{4}e^{2t}$$

となるから、それぞれ足し合わせて $f(t) = \dfrac{1}{2}t + \dfrac{3}{4} - e^t + \dfrac{1}{4}e^{2t}$ が得られます。

(変換表を使う場合)　部分分数分解して $F(s)=\frac{1}{2s^2}+\frac{3}{4s}-\frac{1}{s-1}+\frac{1}{4(s-2)}$ とし、変換表によれば $f(t)=\frac{1}{2}t+\frac{3}{4}-e^t+\frac{1}{4}e^{2t}$ が得られます。■

例題　次の方程式を解け。ただし $y(0)=1$ とする。

$$\frac{d}{dt}y(t)+3y(t)+\int_0^t e^{-(t-\tau)}y(t)d\tau=-e^{-t}$$

解答　左辺第三項は**畳み込み積分**を使います。両辺ラプラス変換すると、$\mathscr{L}[y]=Y(s)$ として

$$sY-y(0)+3Y+\frac{Y}{1+s}=-\frac{1}{1+s}$$

となり、整理して Y を求めると $Y=\frac{s}{(s+2)^2}$ となり、これを逆変換すれば y が求められます。$s=-2$ が 2 位の極なので留数は

$$\mathrm{Res}=\lim_{s\to-2}(se^{st})'=\underline{(1-2t)e^{-2t}}$$

となり、これが $y(t)$ になります。変換表に従っても同様の結果を得ることができます。■

例題　次の方程式を解け。ただし $x(0)=0$ とする。

$$\frac{dx}{dt}+\int_0^t x(\tau)d\tau=\begin{cases}\sin t & (0\le t<\pi)\\ 0 & (\pi\le t)\end{cases}$$

解答　右辺に場合分け関数がきているので**場合分け関数のラプラス変換の公式**を使います。その前に、両辺をラプラス変換しておきましょう。右辺のラプラス変換は

$$\mathscr{L}[(\text{与式右辺})]=\int_0^\pi e^{-st}\sin tdt+\int_\pi^\infty\cdot 0\cdot dt$$

となり、この積分を I とおくと、部分積分により

$$I=[-\frac{1}{s}e^{-st}\sin t]_0^\pi-\int_0^\pi\frac{-1}{s}e^{-st}\cos tdt=[-\frac{1}{s^2}e^{-st}\cos t]_0^\pi-\int_0^\pi\frac{-1}{s^2}e^{-st}(-\sin t)dt$$
$$=\frac{1}{s^2}(1+e^{-s\pi})-\frac{1}{s^2}I$$

となり、$I=\frac{1+e^{-s\pi}}{1+s^2}$ を得ます。また、与式左辺第二項は x の積分式なので、**積分のラプラス変換の公式**を使います。$\mathscr{L}[x(t)]=F(s)$ とおくと

$$\mathscr{L}[\int_0^t x(\tau)d\tau]=\frac{1}{s}F(s)$$

と書け、これで与式両辺のラプラス変換を

$$sF(s) - x(0) + \frac{1}{s}F(s) = \frac{1 + e^{-s\pi}}{1 + s^2}$$

と書くことができます。両辺を整理して $F(s)$ を求めると

$$F(s) = \frac{s}{(s^2+1)^2}(1 + e^{-s\pi})$$

と書け、これをラプラス逆変換すれば $x(t)$ を求めることができます。ここで**与えられた微分方程式が場合分けの関数を含んでいるとき、その方程式の解も場合分け関数になる**ということを覚えておいてください。本問がまさにそのパターンです。$G(s) = \dfrac{s}{(s^2+1)^2}$ とおくと、

$$F(s) = G(s) + G(s)e^{-s\pi}$$

と書くことができ、$G(s)$ のラプラス逆変換 $\mathscr{L}^{-1}[G(s)]$ は

$$\mathscr{L}^{-1}[G(s)] = \frac{t}{2}\sin t$$

として求められます。次に $G(s)e^{-s\pi}$ のラプラス逆変換ですが、これは**場合わけ関数のラプラス変換の公式**を使って

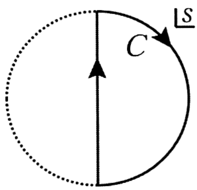
$$\mathscr{L}^{-1}[G(s)e^{-s\pi}] = H(t-\pi)\frac{t-\pi}{2}\sin(t-\pi)$$

として得ることができます。ただし $H(t)$ はヘヴィサイドの階段関数です。これら 2 つの逆変換を足し合わせて

$$x(t) = \begin{cases} \frac{t}{2}\sin t & (t < \pi) \\ \frac{\pi}{2}\sin t & (\pi \leq t) \end{cases}$$

を得ます。これが答えとなります。■

ところで、本問では変換公式を使って逆変換しましたが、$\dfrac{s}{(s^2+1)^2}e^{-s\pi}$ の逆変換を留数定理で計算しようとすると注意が要ります。図の点線で閉経路を取ると $t < \pi$ のとき、$\dfrac{s}{(s^2+1)^2}e^{s(t-\pi)}$ が $s \to -\infty$ で発散してしまうため（ジョルダンの補助定理が使えないので点線経路が使えず）実線で閉経路を取る必要があり、一方で $\pi < t$ のときは点線で閉経路を取る必要があります。この場合分けに気をつけて、結果的にヘヴィサイドステップが現れるわけです。



15.4　演習問題

1　$0 \leq t$ において、次の連立微分方程式を解け。ただし $x(0) = 0, y(0) = 1$ とする。

$$\frac{d}{dt}x(t) + \frac{d}{dt}y(t) + x(t) + y(t) = 2\cos t$$
$$\frac{d}{dt}y(t) - 2x(t) - y(t) = \sin t$$

2　$e^{-\lambda\sqrt{s}}$ $(\lambda > 0)$ をラプラス逆変換せよ。

3　以下の問いに答えよ。以下では $\frac{d}{dt}x(t)$ を $x'(t)$ のように記す。

(1)　常微分方程式 $x''(t) + k^2 x(t) = f(t)$ $(t \geq 0)$、$x'(0) = 0, x(0) = 0$ をみたす $x(t)$ が次で与えられることを示せ。

$$x(t) = \frac{1}{k}\int_0^t \sin k(t-u) f(u)du$$

(2)　確率微分方程式 $\mathscr{X}''(t) + k^2\mathscr{X}(t) = \mathscr{W}'(t)$ $t \geq 0$ の解 $\mathscr{X}(t)$ が初期条件 $\mathscr{X}(0) = 0, \mathscr{X}'(0) = 0$ に従っている。この $\mathscr{X}(t)$ を、$\mathscr{W}'(u)$ の積分として表せ。(ヒント：(1) の結果と比較せよ)

(3)　$\mathscr{W}(t)$ は $E[\mathscr{W}'(t)\mathscr{W}'(s)] = \sigma^2\delta(t-s)$ (ただし $\sigma > 0$) を満足する不規則確率過程であり、$E[\mathscr{X}(t)]$ は確率変数 $\mathscr{X}(t)$ に対する期待値を取る記号とする。時間に依存する確率変数 (確率過程) $\mathscr{X}(t)$ の平均値が 0 のとき、すなわち $E[\mathscr{X}(t)] = 0$ のとき、分散 $V[\mathscr{X}(t)] \equiv E[\{\mathscr{X}(t)\}^2] - \{E[\mathscr{X}(t)]\}^2$ を計算し、t の関数として表せ。

解答

1　$x(t), y(t)$ のラプラス変換を $X(s), Y(s)$ とすると、与式両辺のラプラス変換は

$$\begin{cases} sX(s) - x(0) + sY(s) - y(0) + X(s) + Y(s) = \dfrac{2s}{s^2+1} \\ sY(s) - y(0) - 2X(s) - Y(s) = \dfrac{1}{s^2+1} \end{cases}$$

となり、連立方程式を解いて

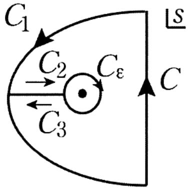
$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+1)}, Y(s) = \frac{s^2+2s+4}{(s+1)(s^2+1)}$$

を得ます。それぞれ $s = -1, \pm i$ を極に持ち、逆変換すると

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}e^{-t} \\ y(t) = \frac{5}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos t + \frac{3}{2}e^{-t} \end{cases}$$

が得られます。

2 図のように閉経路を取って複素積分しましょう。$s=0$ がローラン展開不能な特異点（代数的特異点）なので C_ε で囲って避けます。



$$\int_C e^{st-\lambda\sqrt{s}}ds = \oint e^{st-\lambda\sqrt{s}}ds - \int_{C_1} e^{st-\lambda\sqrt{s}}ds - \int_{C_2} e^{st-\lambda\sqrt{s}}ds - \int_{C_\varepsilon} e^{st-\lambda\sqrt{s}}ds - \int_{C_3} e^{st-\lambda\sqrt{s}}ds$$

閉経路 $C+C_1+C_2+C_\varepsilon+C_3$ 内に特異点はないので第一項は 0 であり、ジョルダンの補助定理により C_1 での積分も 0 となります。C_ε での積分は $\varepsilon\to 0$ で 0 となり、結局 C_2 と C_3 の積分だけが残ります。C_2 と C_3 では角度が 2π まわっていることに注意して

$$\begin{aligned}
\int_C e^{st-\lambda\sqrt{s}}ds &= -\int_{C_2} e^{st-\lambda\sqrt{s}}ds - \int_{C_3} e^{st-\lambda\sqrt{s}}ds \\
&= -\int_{-\infty}^{-\varepsilon} e^{xt-\lambda\sqrt{x}}dx - \int_{-\varepsilon}^{-\infty} e^{xt-\lambda\sqrt{xe^{2\pi i}}}dx \\
&= -\int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-xt-i\lambda\sqrt{x}}dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-xt+i\lambda\sqrt{x}}dx \\
&\xrightarrow{\varepsilon\to 0} 2i\int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-xt}\sin\lambda\sqrt{x}dx
\end{aligned}$$

ここで $u=\sqrt{x}$ とおいて部分積分して

$$\begin{aligned}
&=2i\times 2\int_0^{\infty} ue^{-tu^2}\sin\lambda u du \\
&=4i\times\left\{\left[-\frac{1}{2t}e^{-tu^2}\sin\lambda u\right]_0^{\infty} + \frac{\lambda}{2t}\int_0^{\infty} e^{-tu^2}\cos\lambda u du\right\} \\
&=\frac{i\lambda}{t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-tu^2}\cos\lambda u du
\end{aligned}$$

とします。最後に $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-tu^2+i\lambda u}du = \sqrt{\frac{\pi}{t}}e^{-\frac{\lambda^2}{4t}}$ の実部を取って

$$(\text{求める式}) = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{st-\lambda\sqrt{s}}ds = \frac{\lambda}{2\sqrt{\pi}t^{3/2}}e^{-\frac{\lambda^2}{4t}}$$

を得ます。

3 ラプラス変換の総合問題ですね。確率微分方程式が現れますが驚く必要はありません。

(1) 与式両辺をラプラス変換すると、$x(t)$ のラプラス変換 $X(s)$ は

$$s^2X(s)+k^2X(t)=\mathscr{L}[f]$$

をみたし、これより $X(x)=\dfrac{1}{s^2+k^2}\mathscr{L}[f]$ を得ます。ラプラス変換表から

$$\frac{1}{s^2+k^2}=\mathscr{L}\left[\frac{1}{k}\sin(kt)\right]$$

なので

$$X(s)=\frac{1}{k}\mathscr{L}\big[\sin(kt)\big]\mathscr{L}[f]$$

と書け、畳み込み積分の性質から所望の式を得ます。

(2) (1) とまったく同じです。これにより

$$\mathscr{X}(t)=\frac{1}{k}\int_0^t \sin\big(k(t-\tau)\big)\mathscr{W}'(\tau)d\tau$$

を得ます。

(3) 仮定より $E[\mathscr{X}]=0$ なので

$$\begin{aligned}
V[\mathscr{X}] &= E[\mathscr{X}(t)^2]\\
&= E\left[\frac{1}{k}\int_0^t \sin\big(k(t-\tau)\big)\mathscr{W}'(\tau)d\tau\times\frac{1}{k}\int_0^t \sin\big(k(t-\rho)\big)\mathscr{W}'(\rho)d\rho\right]\\
&= \frac{1}{k^2}\int_0^t d\tau\int_0^t d\rho\sin\big(k(t-\tau)\big)\sin\big(k(t-\rho)\big)E[\mathscr{W}'(\tau)\mathscr{W}'(\rho)]\\
&= \frac{1}{k^2}\int_0^t d\tau\int_0^t d\rho\sin\big(k(t-\tau)\big)\sin\big(k(t-\rho)\big)\sigma^2\delta(\tau-\rho)\\
&= \frac{\sigma^2}{k^2}\int_0^t d\tau\sin^2\big(k(t-\tau)\big)\\
&= \frac{\sigma^2}{k^2}\int_0^t \frac{1-\cos 2k(t-\tau)}{2}d\tau\\
&= \frac{\sigma^2}{2k^2}\left(t-\frac{\sin 2kt}{2k}\right)
\end{aligned}$$

を得ます。■

第 16 章

グリーン関数と基本解

非斉次微分方程式の解を構成するのにグリーン関数が役立ちます。ここでは特にグリーン関数の**基本解（主要解）**の求め方に着目し、その物理問題への応用を扱います。なお、基本解を求めるためにフーリエ変換を用いるのですが、ここで現れるいくつかの問題点と注意は付録で詳しく説明します。

16.1 グリーン関数の役割と基本解

次の非斉次微分方程式を考えましょう。$\mathscr{L}$ は定数係数の線形微分演算子[*1] とします。

$$\mathscr{L}u(x) = -\rho(x) \tag{16.1}$$

$\rho(x)$ は任意の関数であり、ひとまず**境界条件は考えない**ものとします。ここで式 (16.1) に似た次の方程式を用意します。$\mathscr{L}$ は x のみについて微分するとします。

$$\mathscr{L}G^{\infty}(x,x') = -\delta(x-x') \tag{16.2}$$

さて、両辺に $\rho(x')$ を掛けて x' で積分すると、

$$\mathscr{L}\int_{-\infty}^{\infty} dx' G^{\infty}(x,x')\rho(x') = -\rho(x) \tag{16.3}$$

となり、式 (16.3) と (16.1) を比較すると波線部が $u(x)$ に相当しているように見えますね。正確には斉次方程式 $\mathscr{L}u_0(x) = 0$ の解 $u_0(x)$ を用いて

$$u(x) = u_0(x) + \int_{-\infty}^{\infty} dx' G^{\infty}(x,x')\rho(x') \tag{16.4}$$

とすべきで、この式が微分方程式 (16.1) の一般解になっていることがわかります。[*2] このような $G^{\infty}(x,x')$ を**基本Green（グリーン）関数（基本解）**[*3] と呼び、本章ではグリーン関

[*1] 適当な数列 a_n を用いて $\mathscr{L} = a_0 + a_1\dfrac{d}{dx} + a_2\dfrac{d^2}{dx^2} + \cdots$ と書けるとします。

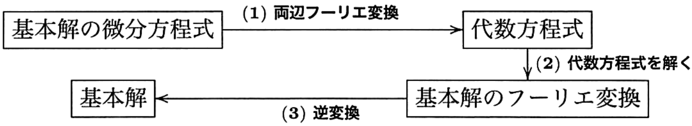
[*2] 実際、左から $\mathscr{L}$ を掛けて、$\mathscr{L}u_0 = 0$ および式 (16.2) より簡単に示せますね。

[*3] 本によっては**主要解**とも呼ばれます。

数を用いた微分方程式の解の構成を目指します。[*4] 式 (16.4) はあくまで境界を考えないものであり、境界条件次第では表面項の積分が現れます。いくつかの $\mathscr{L}$ に対し、フーリエ変換を用いて基本解を求めてみましょう。

16.2　基本解の求め方

次の図式に沿って攻めます。



例えば次の微分方程式について考えてみましょう。μ は正の実数とします。

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}-\mu^2\right)u(x)=-\rho(x) \tag{16.5}$$

対応する基本解の方程式は

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}-\mu^2\right)G^{\infty}(x,x')=-\delta(x-x') \tag{16.6}$$

であり、これを解いて $G^{\infty}(x,x')$ を求めます。

$G^{\infty}(x,x')$ のフーリエ変換 $\tilde{G}^{\infty}(k,x')$ に対し、

$$G^{\infty}(x,x')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{G}^{\infty}(k,x')e^{ikx}dx$$

として、式 (16.6) 両辺をフーリエ変換すると[*5]

$$(-k^2-\mu^2)\tilde{G}^{\infty}(k,x')=-e^{-ikx'} \tag{16.7}$$

となり、$\tilde{G}^{\infty}(k,x')=\dfrac{e^{-ikx'}}{k^2+\mu^2}$ が得られます。これを逆変換すると

$$G^{\infty}(x,x')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ik(x-x')}}{k^2+\mu^2}dk=\frac{1}{2\mu}e^{-\mu|x-x'|}$$

が得られます。[*6] これで微分方程式 (16.5) に対応する基本解が求められました。

[*4] さて、式 (16.4) を眺めながら物理的な意味について少し考えてみましょう。式 (16.4) 右辺の第一項は斉次解であり、第二項は非斉次項の積分で与えられています。そもそも斉次方程式はほったらかしの自然現象を記述する方程式であり、これに人の手（外界からの影響）が加わったものが非斉次方程式となります。例えば単振動の運動方程式 $m\ddot{x}=-kx$ は単なるバネの振動ですが、外界から力 $F(t)$ を加えると $m\ddot{x}=-kx+F(t)$ のように強制振動の方程式となります。

つまり式 (16.4) 右辺第二項は外界から受けた影響を重ね合わせてできた項となり、外界から受けた影響をリアクションとして返す関数が $G^{\infty}(x,x')$ であると言えます。このように、外から受けた刺激に対し、グリーン関数が応答として現れることから、グリーン関数のことを伝播関数などと呼ぶこともあります。

[*5] 右辺は $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikx}\delta(x-x')=e^{-ikx'}$ と計算されます。

[*6] 最後に留数定理とジョルダンの補題を使いました。

例題 次のヘルムホルツ型微分方程式について考える。q は正の実数とする。

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+q^2\right)u(x)=-\rho(x) \tag{16.8}$$

(1) 対応するグリーン関数の基本解 $G^{\infty}(x,x')$ の従う微分方程式を記せ。

(2) $G^{\infty}(x,x')$ のフーリエ変換 $\tilde{G}^{\infty}(k,x')$ を求めよ。

(3) (2) の結果を逆変換し、右向き波の $G^{\infty}(x,x')$ を求めよ。

解答 逆変換する際に発散を防ぐ工夫が必要になります。[*7]

(1) 基本解の従う方程式は次のようになります。

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+q^2\right)G^{\infty}(x,x')=-\delta(x-x') \tag{16.9}$$

(2) (1) の両辺をフーリエ変換し $\tilde{G}^{\infty}(k,x')=\dfrac{e^{-ikx'}}{k^2-q^2}$ を得ます。

(3) (2) の $\tilde{G}^{\infty}(k,x')$ は $k=\pm q$ が特異点になっているので、$k=-\infty\to\infty$ で積分すると発散してしまいます。そこで**特異点を実軸上から逃がして複素積分し、後で戻す**というテクニック[*8]を用います。逆変換は

$$\begin{aligned} G^{\infty}(x,x') &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ik(x-x')}}{k^2-q^2}dk \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ik(x-x')}}{k^2-(q+i\varepsilon)^2}dk \end{aligned} \tag{16.10}$$

と書け、右辺の積分を実行すればグリーン関数の基本解が得られます。

まず、$x-x'>0$ のときについて考えると、上半平面で複素積分すればよく、このときの留数は $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{e^{i(q-i\varepsilon)(x-x')}}{2(q+i\varepsilon)}=\frac{1}{2\pi}\frac{e^{iq(x-x')}}{2q}$ であり、次に $x-x'<0$ のときについて考えると下半平面で複素積分すればよいので、このときの留数は $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{e^{i(q-i\varepsilon)(x-x')}}{-2(q+i\varepsilon)}=\frac{1}{2\pi}\frac{e^{-iq(x-x')}}{-2q}$ となります。後者が積分経路負方向での一周積分であることに注意して、留数定理により

$$\begin{aligned} G^{\infty}(x,x') &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ik(x-x')}}{k^2-(q+i\varepsilon)^2}dk = \begin{cases} \dfrac{i}{2q}e^{iq(x-x')} & x-x'>0 \\ \dfrac{i}{2q}e^{-iq(x-x')} & x-x'<0 \end{cases} \\ &= \frac{i}{2q}e^{iq|x-x'|} \end{aligned} \tag{16.11}$$

[*7] これは付録でも詳しく取り扱います。

[*8] 正しくは、このテクニックを用いて本来発散してしまう積分を有限な値にするよう再定義するわけです。これを **（コーシーの）主値積分** と呼びます。これについては 146 ページでも扱っています。

が得られます。■　ここで、ε の符号を逆転して $\varepsilon \to -\varepsilon$ とすると特異点がずれ、このときのグリーン関数を実際に計算すると

$$G^{\infty}(x,x') = -\frac{i}{2q}e^{-iq|x-x'|} \tag{16.12}$$

となって先の結果に**一致しません**。ここで式 (16.11) を**右向き（外向き）波**、式 (16.12) を**左向き（内向き）波**と呼びます。名前は指数関数の肩の符号から来ており、ここでは右向き波を指定されているので答えは式 (16.11) となります。[*9]

例題　次の 3 次元ポアソン方程式について考える。

$$\Delta\phi(\boldsymbol{r}) = -\rho(\boldsymbol{r}) \tag{16.13}$$

(1)　対応するグリーン関数の基本解 $G^{\infty}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ の従う微分方程式を記せ。

(2)　$G^{\infty}(x,x')$ のフーリエ変換 $\tilde{G}^{\infty}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{r}')$ を求めよ。

(3)　(2) の結果を逆変換し $G^{\infty}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ を求めよ。

解答

(1)　基本解の従う方程式は次のようになります。

$$\Delta G^{\infty}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{16.14}$$

(2)　両辺をフーリエ変換し $\tilde{G}^{\infty}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{r}') = \dfrac{1}{k^2}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'}$ を得ます。

(3)　(2) の結果を逆変換します。$\boldsymbol{k}$ を球座標にして積分します。

$$G^{\infty}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint \tilde{G}^{\infty}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{r}')e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}d^3k = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint \frac{1}{k^2}e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}d^3k$$

ここで $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$ と $\boldsymbol{k}$ の間の角度を θ として

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{\infty} dk k^2 \cdot \frac{1}{k^2}\int_{-1}^{1} d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\varphi e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\cos\theta} \\
&= \frac{1}{2\pi^2|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\int_0^{\infty} dk \frac{\sin k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{k} \\
&= \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}
\end{aligned}$$

となり、[*10] 基本解が得られます。■

---

*9　グリーン関数は伝搬の役割を果たしており、相互作用項（ソース項）の影響をどちらの方向に伝搬していくかが一意に決まらないことからこのような不定性が現れます。これについては付録で詳しく解説します。

*10　$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$ を用いました。

16.3 相反性

証明はしませんが次の主張は重要です。

> **相反性定理**
>
> **定理 16.1** $G(x,x') = G(x',x)$ が成り立つ。

この性質はグリーン関数のみたす微分方程式の右辺が $\delta(x-x')$ であることに由来し、**相反性**と呼ばれています。*11 基本解に限らず、グリーン関数はすべて相反性をみたします。後述する時間付き基本解 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';t,t')$ に対しては $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';t,t') = G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r};-t',-t)$ が成り立ちます。

16.4 時間と因果律

グリーン関数は物理的に非斉次項の伝播を表すと説明してきましたが、これは空間変数に限ったものではなく、時間変数についても同様のことが言えます。

例えば次の拡散方程式について考えてみましょう。

$$\left(\kappa^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t}\right)\rho(x,t) = -S(x,t)$$

この式に対応する基本グリーン関数の方程式は次のように与えられます。

$$\left(\kappa^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t}\right)G^\infty(x,x';t,t') = -\delta(x-x')\delta(t-t') \tag{16.15}$$

これをフーリエ変換の手法で解きましょう。$G^\infty(x,x';t,t')$ の時空フーリエ変換 $g^\infty(k,x';\omega,t')$ を次で定めます。*12

$$g(k,x',\omega,t') = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}dte^{i(kx-\omega t)}G^\infty(x,x';t,t') \tag{16.16}$$

さて、式 (16.15) を両辺フーリエ変換すると、

$$(-k^2\kappa^2 + i\omega)g(k,x';\omega,t') = -\frac{1}{(2\pi)^2}e^{-ikx'+i\omega t'}$$

---

*11 例えばポアソン方程式の解 $\phi(\boldsymbol{r})$ は電荷 $\rho(\boldsymbol{r})$ によって生じる電位（ポテンシャル）を表しており、これに対応する基本解 $G^\infty(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ は、座標 $\boldsymbol{r}$ にある点電荷が座標 $\boldsymbol{r}'$ につくる電位を表しています。同時に、この基本解は $\boldsymbol{r}'$ の点電荷が座標 $\boldsymbol{r}$ につくる電位を表しているとも言え、この対称性からわかるように

$$G^\infty(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = G^\infty(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})$$

が成り立っています（これまでに求めた基本解もすべてこの性質をみたしていますね）。

*12 時間フーリエ変換について、指数関数の中身の符号が空間フーリエ変換と反対になっていることに注意して下さい。

が得られ、これを逆変換することで基本グリーン関数を得ます。

$$G^{\infty}(x,x';t,t') = \frac{i}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{\omega + i\kappa^2 k^2} e^{ik(x-x')-i\omega(t-t')}$$
$$= \frac{i}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-x')} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{\omega + i\kappa^2 k^2} e^{-i\omega(t-t')}}$$

右辺波線部を計算しましょう。ω の積分（複素積分）は指数関数の肩 $-i\omega(t-t')$ の符号によって変わります。

まず $t-t'<0$ のときを考えると、上半平面の積分を考えればよく、答えは 0 となり、次に $t-t'>0$ のときを考えると、下半平面の積分を考えれば良いので、留数定理から答えは $-2\pi i e^{-\kappa^2 k^2 (t-t')}$ となります。これをまとめるとヘヴィサイドステップ $\theta(t-t')$ を用いて

$$\text{波線部} = -2\pi i e^{-\kappa^2 k^2 (t-t')} \theta(t-t')$$

となり、基本グリーン関数は $G^{\infty}(x,x';t,t') = \dfrac{1}{2\pi}\theta(t-t')\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-x')-\kappa^2 k^2 (t-t')}$ となって、ガウス積分の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ak^2+ibk} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}},\ a>0, b\in(\text{実数}) \tag{16.17}$$

を用いて基本グリーン関数

$$G^{\infty}(x,x';t,t') = \frac{1}{2\kappa\sqrt{\pi(t-t')}} \exp\left(-\frac{(x-x')^2}{4\kappa^2(t-t')}\right)\theta(t-t')$$

を得ます。さて、基本グリーン関数に $\theta(t-t')$ が現れたことに注意しましょう。

> $\theta(t-t')$ が含まれている → **遅延グリーン関数**
> $\theta(t'-t)$ が含まれている → **先進グリーン関数**

このように 2 つの呼び名で区分けします。今回現れたのは遅延グリーン関数というわけです。**$\theta(t-t')$ は時刻 t' で発生したソース（非斉次）項はそれよりも遅い時刻 t にだけ影響を及ぼすことを表します。**

例題　非斉次一次元波動方程式の基本グリーン関数は次の微分方程式に従う。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G^{\infty}(x,x';t,t') = -\delta(x-x')\delta(t-t')$$

この方程式を解いて基本グリーン関数 $G^{\infty}(x,x';t,t')$ を遅延条件から求めよ。

解答　$G^{\infty}(x,x';t,t')$ のフーリエ変換を次のようにおきます。

$$G^{\infty}(x,x';t,t') = \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\omega g(k,x';\omega,t') e^{i(kx-\omega t)}$$

すると基本解の方程式両辺のフーリエ変換は

$$\left(-k^2+\frac{\omega^2}{c^2}\right)g(k,x';\omega,t')=-e^{-ikx'+i\omega t'}$$

となります。これを逆変換し、特異点を避けて

$$\begin{aligned}G^\infty(x,x';t,t')&=\frac{c^2}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}dk\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\frac{-1}{\omega^2-c^2k^2}e^{ik(x-x')-i\omega(t-t')}\\&=-\frac{c^2}{4\pi^2}\lim_{\epsilon\searrow 0}\int_{-\infty}^{\infty}dk\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\frac{e^{ik(x-x')-i\omega(t-t')}}{(\omega-ck+i\epsilon)(\omega+ck+i\epsilon)}\end{aligned}$$

とします。*13 ここで ω 積分の部分を取り出し

$$G_t(t-t')=\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\frac{e^{-i\omega(t-t')}}{(\omega-ck+i\epsilon)(\omega+ck+i\epsilon)}$$

とおきましょう。これは下平面に極 $\omega=ck-i\epsilon,-ck-i\epsilon$ を持ちますから、

<u>$t-t'>0$ **のとき**</u>　下半平面で積分し、留数定理とジョルダンの補助定理から

$$G_t(t-t')=-2\pi i\times\left(\frac{e^{-ick(t-t')}}{2ck}+\frac{e^{ick(t-t')}}{-2ck}\right)=-\frac{2\pi}{ck}\sin ck(t-t') \tag{16.18}$$

となります。

<u>$t-t'<0$ **のとき**</u>　上半平面で積分し、コーシーの積分定理とジョルダンの補助定理から $G_t(t-t')=0$ を得ます。

よって $G_t(t-t')=-\dfrac{2\pi}{ck}\sin ck(t-t')\theta(t-t')$ となり、

$$\begin{aligned}G^\infty(x,x';t,t')&=\frac{c^2}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}dke^{ik(x-x')}G_t(t-t')\\&=\frac{c^2}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}dke^{ik(x-x')}\frac{2\pi}{ck}\sin ck(t-t')\theta(t-t')\\&=\frac{c}{2\pi}\theta(t-t')\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\big(ck(t-t')\big)e^{ik(x-x')}}{k}dk\end{aligned}$$

を得ます。最後に $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin k|T|\cos kX}{k}=\pi\theta(|T|-|X|)$ *14 を用いて

$$G^\infty(x,x';t,t')=\frac{c}{2}\theta\big(c(t-t')-|x-x'|\big)\theta(t-t')$$

$$=\frac{c}{2}\theta\big(t-t'-\frac{|x-x'|}{c}\big)$$

を得ます。■

---

*13　$i\epsilon$ の符号に注意して下さい。これは遅延条件の結果を見越したものになっています。$\epsilon\to-\epsilon$ とすれば先進条件の基本解が得られます。

*14　これを示しておきましょう。$f(x)=\theta(|T|-|x|)$ をフーリエ変換すると

$$F(k)=\int_{-\infty}^{\infty}dxe^{-ikx}\theta(|T|-|x|)=\int_{-|T|}^{|T|}dxe^{-ikx}=\frac{2\sin k|T|}{k}$$

16.5 摂動展開

非斉次微分方程式 (16.1) の、境界を無視した解は斉次解 $u_0(x)$ と合わせて

$$u(x) = u_0(x) + \int_{-\infty}^{\infty} dx' G^{\infty}(x, x')\rho(x')$$

のように書けるのでした。ここで、例えばシュレディンガー方程式[*15] のように非斉次方程式の右辺が $\rho(x)$ ではなく $f(x)u(x)$ のような形をしていた時を考えましょう。これまでのように $u(x)$ は

$$u(x) = u_0(x) + \int_{-\infty}^{\infty} dx' G^{\infty}(x, x')f(x')u(x')$$

のように与えられますが、右辺の積分の中に、これから求めるべき $u(x)$ が含まれているせいで右辺の積分が計算できないという困難に直面します。そこで右辺の $u(x')$ を左辺の $u(x)$ で置き換え、次のようにします。

$$\begin{aligned} u(x) =& u_0(x) + \int_{-\infty}^{\infty} dx' G^{\infty}(x, x')f(x')u_0(x') \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dx'' G^{\infty}(x, x')G^{\infty}(x', x'')f(x')f(x'')u_0(x'') + \cdots \end{aligned}$$

ここで $f(x)$ が小さな関数[*16] であれば f の高次は打ち切ることができ、近似的に

$$u(x) \approx u_0(x) + \int_{-\infty}^{\infty} dx' G^{\infty}(x, x')f(x')u_0(x')$$

となり、さらにこれを逆変換すると

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} F(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{2\sin k|T|}{k} e^{ikx}$$

となります。これより

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\sin k|T| e^{ikx}}{k} = \pi\theta(|T| - |x|)$$

が成り立ちます。両辺の実部を取れば所望の式が得られます。余談ですが、両辺で $x = 0$ とすれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\theta}{\theta} d\theta = \pi$$

が得られます。

*15 シュレディンガー方程式は次のように表されます。

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) - E\psi(x) = -V(x)\psi(x)$$

*16 適当な正の実数 ϵ を取って $f(x) \to \epsilon f(x)$ と書き換えると、$u(x)$ は

$$u(x) = \bigcirc\epsilon + \triangle\epsilon^2 + O(\epsilon^3)$$

のように、あたかも ϵ に対するマクローリン展開のようになることがわかりますね。これで $\epsilon \ll 1$ のとき ϵ の高次を打ち切れるので、ϵ の 1 次までを残してやると、一次の摂動展開が得られるわけです。

のように書くことができます。これを**（一次の）摂動展開**と呼びます。

摂動展開は、例えば「元は簡単な微分方程式だったが、付加的な非斉次項がついて厳密に解けなくなってしまった」際に重宝します。

16.6　演習問題

ここでは電磁気学、量子力学への応用を取り上げます。

1　球対称電荷分布 $\rho(r)$ を持つ 3 次元ポアソン方程式 $\Delta\phi(\boldsymbol{r}) = -\rho(r)$ に対し、$\rho(r)$ が次で与えられているとする。ここで球対称 $\Leftrightarrow \rho(\boldsymbol{r}) = \rho(r)$ である。

$$\rho(r) = \theta(a-r) = \begin{cases} 1 & r \leq a \\ 0 & a < r \end{cases}$$

このときの $\phi(\boldsymbol{r})$ を求めよ。

2　以下の各問に答えよ。

(1)　次の定積分を計算せよ。ただし $f(t_0) = t$ とし、この値を答えに利用せよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt' g(t')\delta(t - f(t'))$$

また、これにより $g(t') = \dfrac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t'|}, f(t') = t' + \dfrac{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t'|}{c}$ のとき、上の積分計算を実行せよ。$\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}$ は定ベクトルとし、c は定数とする。また t_0 は $f(t_0) = t$ をみたすとし、この t_0 を答えに用いること。

(2)　点電荷による電磁波の放射について考えよう。マクスウェル方程式の電磁ポテンシャル表現は以下の式で与えられる。

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = -\mu_0 \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$$
$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi(\boldsymbol{r},t) = -\frac{\rho(\boldsymbol{r},t)}{\epsilon_0}$$

3 次元波動方程式の遅延基本解は次で表される。$\phi(\boldsymbol{r})$ を積分表示せよ。

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';t,t') = \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta(\tfrac{1}{c}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| - |t-t'|)\theta(t-t')$$

(3)　定ベクトル速度 $\boldsymbol{v}$ で進む電荷 q の作る電磁場について考えよう。このとき電荷密度、電流密度はそれぞれ次で与えられる。

$$\rho(\boldsymbol{r},t) = q\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t)$$
$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) = q\boldsymbol{v}\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t)$$

このとき $\phi(\boldsymbol{r},t)$ および $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ を求めよ。ただし **1** (2) の計算で用いたように、適当に t_0 を仮定して答えに利用して良い。

3 ポテンシャル $V(\boldsymbol{r})$ の相互作用を受けて運動する質量 m の粒子を記述する、次の定常状態の 3 次元シュレディンガー方程式について考える。ここで $V(\boldsymbol{r}) = V(r)$（球対称）とする。

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\boldsymbol{r}) + V(r)\psi(\boldsymbol{r}) = E\psi(\boldsymbol{r}), E > 0$$

(1) グリーン関数の主要解 $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ を次をみたすように定める。

$$\psi(\boldsymbol{r}) = e^{i\kappa z} - \frac{2m}{\hbar^2}\iiint G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')V(\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}')d^3r'$$

ただし $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ である。主要解 $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ を外向き波として求めよ。

(2) $r = |\boldsymbol{r}|$ とし、$|\boldsymbol{r}| \gg |\boldsymbol{r}'|$ の領域について考えよう。$\dfrac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \approx \dfrac{1}{r}$ および $|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'| \approx r - \dfrac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'}{r}$ とし、z' 軸と $\boldsymbol{r}'$ のなす角を θ とおく。このとき、ポテンシャルを小さな関数と仮定して $\psi(\boldsymbol{r})$ を近似すると

$$\psi(\boldsymbol{r}) = e^{ikz} + \frac{1}{r}f(\theta)e^{ikr}$$

のように書けることを示し、そのような $f(\theta)$ を $V(r')$ の積分で表せ。

解答

1 ポアソン方程式のグリーン関数は例題で得ており、$\phi(\boldsymbol{r})$ は次で与えられます。[*17]

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \int d\boldsymbol{r}' G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi}\int d\boldsymbol{r}' \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}$$

これを 3 次元球座標で計算しましょう。$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{r}'$ のなす角を θ' とすれば、

$$|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'| = \sqrt{r^2 - 2rr'\cos\theta' + r'^2}$$

と書けるので、3 次元球座標変換 $d\boldsymbol{r}' = r'^2 dr' d\theta' \sin\theta' d\varphi'$ を思い出し、

$$\begin{aligned}
\phi(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty dr' r'^2 \int_0^\pi d\theta' \sin\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty dr' r'^2 \int_0^\pi d\theta' \sin\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{\sqrt{r^2 - 2rr'\cos\theta' + r'^2}} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty dr' r'^2 \int_0^\pi d\theta' \sin\theta' \frac{\rho(r')}{\sqrt{r^2 - 2rr'\cos\theta' + r'^2}}
\end{aligned}$$

[*17] ここでは境界条件を加味せず、$|\boldsymbol{r}| \to \infty$ で $\phi \to 0$ になることを用いていることに注意してください。また、この場合には斉次解が現れない（斉次解は自明解 0 のみである）ことにも留意しておいてください。

と計算できる。ここで $X=\cos\theta'$ とおいて置換積分し、

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{2}\int_0^\infty dr'r'^2\int_{-1}^{1}dX\frac{\rho(r')}{\sqrt{r^2-2rr'X+r'^2}}\\
&=\frac{1}{2}\int_0^\infty dr'r'^2\rho(r')\left(2\times\left.\frac{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'X}}{-2rr'}\right|_{X=-1}^{1}\right)\\
&=\frac{1}{2r}\int_0^\infty dr'r'\rho(r')\{|r+r'|-|r-r'|\}
\end{aligned}
$$

ここで積分範囲を $0\to r$ と $r\to\infty$ に分けて

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{2r}\int_0^r dr'r'\rho(r')2r'+\frac{1}{2r}\int_r^\infty dr'r'\rho(r')2r\\
&=\frac{1}{r}\int_0^r dr'r'^2\rho(r')+\int_r^\infty dr'r'\rho(r')
\end{aligned}
$$

となり、動径以外の積分がすべて計算できました。最後に与えられた電荷分布を代入してみましょう。

$$
\phi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{r}\int_0^r dr'r'^2\theta(a-r')+\int_r^\infty dr'r'\theta(a-r')
$$

ややこしい積分なので場合分けし、<u>$r<a$ のとき</u>、

$$
\phi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{r}\int_0^r dr'r'^2\theta(a-r')+\int_r^\infty dr'r'\theta(a-r')=\frac{1}{r}\int_0^r dr'r'^2+\int_r^a dr'r'=\frac{1}{6}(3a
$$

となり、<u>$a<r$ のとき</u>、$\rho(\boldsymbol{r})=\dfrac{1}{r}\displaystyle\int_0^a dr'r'^2\rho=\dfrac{a^3}{3r}$ となります。まとめると

$$
\phi(\boldsymbol{r})=\begin{cases}\dfrac{(3a^2-r^2)}{6} & (r<a)\\[2mm] \dfrac{a^3}{3r} & (a<r)\end{cases}
$$

が得られます。■

2 本番は (3) です。

(1) 答えは $\dfrac{1}{|f'(t_0)|}g(t_0)$ となります。与えられた関数を用いると

$$
\left.\frac{df(t')}{dt'}\right|_{t'=t_0}=1+\frac{1}{c}\frac{d}{dt'}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t'|\Bigg|_{t'=t_0}=1-\frac{\boldsymbol{v}}{c}\cdot\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t_0}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t_0|}
$$

となり、[*18] これで求めるべき答えは $\dfrac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t_0|-\dfrac{\boldsymbol{v}}{c}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t_0)}$ となります。

---

*18 成分計算すればすぐ確かめられますが、

$$
\frac{d}{dt}\sqrt{(x-v_xt)^2+(y-v_yt)^2+(z-v_zt)^2}=\frac{-v_x(x-v_xt)-v_y(y-v_yt)-v_z(z-v_zt)}{\sqrt{(x-v_xt)^2+(y-v_yt)^2+(z-v_zt)^2}}=-\boldsymbol{v}\cdot\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}}
$$

となることを用いました。

(2)　基本解を用いて次のように表せます。

$$\phi(\boldsymbol{r},t) = \iiint d\boldsymbol{r}' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\rho(\boldsymbol{r}',t')}{\epsilon_0} G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';t,t')$$
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \iiint d\boldsymbol{r}' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \mu_0 \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t') G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';t,t')$$

(3)　(2) の積分表示を具体的に計算していくことになります。$\phi(\boldsymbol{r},t)$ は

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{r},t) &= \iiint d\boldsymbol{r}' \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\rho(\boldsymbol{r}',t')}{\epsilon_0} \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \delta(\tfrac{1}{c}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| - t + t') \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \iiint d\boldsymbol{r}' \frac{q\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{v}t')}{\epsilon_0} \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \delta(\tfrac{1}{c}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| - t + t') \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{1}{4\pi\epsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t'|} \delta(\tfrac{1}{c}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t'| - t + t') \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0\left(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t_0| - \dfrac{\boldsymbol{v}}{c}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t_0)\right)}\end{aligned}$$

となります。最後の式変形では (1) の結果を用いました。$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ も同様にして

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t_0| - \dfrac{\boldsymbol{v}}{c}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t_0)}$$

が得られます。■

この ϕ と $\boldsymbol{A}$ の組みを**Lienard-Wiechert**(リエナール・ヴィーヘルト)ポテンシャルと呼び、原理的には、これで得られたポテンシャルから電場や磁場が計算できます。

3　摂動展開の一次近似、**Born**(ボルン)**近似**の問題です。

(1)　与えられた $\psi(\boldsymbol{r})$ の式をシュレディンガー方程式に代入すると

$$(\nabla^2 + k^2)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

となり、この $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ は 3 次元ヘルムホルツ方程式の主要解になっています。

$$g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{r}') = \int_{-\infty}^{\infty} G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') e^{-i\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{u}}$$

とおき、ヘルムホルツ方程式を両辺フーリエ変換すると次のようになります。

$$(-u^2 + k^2)g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{r}') = -e^{-i\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r}'}$$

ここから $g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{r}')$ を求めて逆変換し、

$$\begin{aligned}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint d\boldsymbol{u} g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{r}')e^{i\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r}} &= \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint d\boldsymbol{u} \frac{1}{u^2-k^2} e^{i\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')} \\ &= \lim_{\epsilon\to+0} \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint d\boldsymbol{u} \frac{1}{u^2-(k+i\epsilon)^2} e^{i\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}\end{aligned}$$

とします。最後の式では積分が発散しないように $\epsilon > 0$ を用いて $k \to k + i\epsilon$ と修正（正則化）しています。ϵ が正なので、外向き波が得られるはずです。$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$ と $\boldsymbol{u}$ のなす角を θ とおき、3 次元球座標積分を行うと

$$
\begin{aligned}
G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') &= \lim_{\epsilon \to +0} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty du u^2 \int_{-1}^1 d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{e^{i\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}}{u^2 - (k+i\epsilon)^2} \\
&= \lim_{\epsilon \to +0} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty du u^2 \int_{-1}^1 d\cos\theta \frac{e^{iu|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\cos\theta}}{u^2 - (k+i\epsilon)^2} \\
&= \frac{1}{2\pi^2 |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \underline{\lim_{\epsilon \to +0} \int_0^\infty du \frac{u \sin u|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}{u^2 - (k+i\epsilon)^2}}
\end{aligned}
$$

ここで波線部の積分を計算しましょう。被積分関数が u についての偶関数なので

$$
\begin{aligned}
\text{(波線部)} &= \lim_{\epsilon \to +0} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty du \frac{u \sin u|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}{u^2 - (k+i\epsilon)^2} \\
&= \lim_{\epsilon \to +0} \left[\frac{1}{4i} \int_{-\infty}^\infty du \frac{u e^{iu|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{u^2 - (k+i\epsilon)^2} - \frac{1}{4i} \int_{-\infty}^\infty du \frac{u e^{-iu|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{u^2 - (k+i\epsilon)^2} \right]
\end{aligned}
$$

となります。右辺第一項は上半平面の半円で、第二項は下半平面の半円で複素積分しましょう。第一項は極 $u = k$ を経路に含み、第二項は極 $u = -k$ を経路に含むので、留数定理とジョルダンの補助定理から

$$
\text{(波線部)} = \frac{\pi}{4} e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} + \frac{\pi}{4} e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \frac{\pi}{2} e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}
$$

を得ます。これにより $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \dfrac{1}{4\pi|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$ を得ます。

(2) (1) の結果より

$$
\begin{aligned}
\psi(\boldsymbol{r}) &= e^{ikz} - \frac{2m}{\hbar^2} \iiint G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') V(r') \psi(\boldsymbol{r}') d^3 r' \\
&= e^{ikz} - \frac{2m}{\hbar^2} \iiint \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} V(r') \psi(\boldsymbol{r}') d^3 r'
\end{aligned}
$$

のように書けます。右辺で $\psi(\boldsymbol{r}') \to e^{ikz'}$ と（摂動）し、

$$
\psi(\boldsymbol{r}) \approx e^{ikz} - \frac{2m}{\hbar^2} \iiint \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} V(r') e^{ikz'} d^3 r'
$$

としましょう。与えられた近似条件を用いてこれを書き換えると

$$
\begin{aligned}
\psi(\boldsymbol{r}) &\approx e^{ikz} - \frac{2m}{\hbar^2} \iiint \frac{1}{4\pi r} e^{ik(r - \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'}{r})} V(r') e^{ikz'} d^3 r' \\
&= e^{ikz} - \frac{2m}{\hbar^2} \times \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \iiint e^{ik(z' - \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'}{r})} V(r') d^3 r'
\end{aligned}
$$

ここで単位ベクトル $\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_r$ を $z' = \boldsymbol{e}_0 \cdot \boldsymbol{r}', \boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$ をみたすように取ると、

$$
= e^{ikz} - \frac{2m}{\hbar^2} \times \frac{1}{4\pi r} e^{ikr} \iiint e^{ik(\boldsymbol{e}_0 - \boldsymbol{e}_r)\cdot\boldsymbol{r}'} V(r') d^3 r' \qquad (16.19)
$$

となります。$\boldsymbol{e}_0 = (0,0,1)$ であり、ここで $\boldsymbol{r}$ を極座標に取り、$z = r\cos\theta$ としましょう。すると $\boldsymbol{e}_0 \cdot \boldsymbol{e}_r = \cos\theta$ となるから

$$|\boldsymbol{e}_0 - \boldsymbol{e}_r| = \sqrt{\boldsymbol{e}_0^2 - 2\boldsymbol{e}_0 \cdot \boldsymbol{e}_r + \boldsymbol{e}_r^2} = \sqrt{2 - 2\cos\theta} = \sin\frac{\theta}{2}$$

となります。さらに $K = k\sin\frac{\theta}{2}$ とおき、ややこしいですが $\boldsymbol{e}_0 - \boldsymbol{e}_r$ と $\boldsymbol{r}'$ のなす角を θ' とおいて球座標積分を用い、$d^3r' = dr'r'^2 d\cos\theta' d\varphi'$ に気をつけ

$$\psi(\boldsymbol{r}) \approx e^{ikz} - \frac{2m}{\hbar^2} \times \frac{e^{ikr}}{4\pi r}\int_0^\infty dr'r'^2 \int_{-1}^1 d\cos\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' e^{iKr'\cos\theta'} V(r')$$

とします。角積分をそれぞれ計算し、

$$\psi(\boldsymbol{r}) \approx e^{ikz} - \frac{2m}{\hbar^2} \times \frac{e^{ikr}}{r}\int_0^\infty dr'r'V(r')\sin Kr'$$

としてやれば、答えは $f(\theta) = -\dfrac{2m}{\hbar^2}\displaystyle\int_0^\infty dr'r'\sin Kr'V(r')$ となります。ここで $K = k\sin\frac{\theta}{2}$ です。■

$f(\theta)$ は量子力学で**散乱振幅**と呼ばれます。これはミクロな粒子の散乱問題で、散乱断面積を計算する際に利用されます。

第 17 章

グリーン関数と境界値問題

与えられた境界条件に応じて微分方程式を解く問題を**境界値問題**と呼びます。ここでは基本解を加工してグリーン関数を作り上げ、特に Dirichlet 条件における境界値問題の解を構成する手法を紹介します。

17.1 境界値問題とグリーン関数の構成

さて、基本解 $G^{\infty}(x,x')$ を元手にグリーン関数 $G(x,x')$ を構成しましょう。グリーン関数は当然境界条件をみたす必要があり、適当な $g(x,x')$ を用意して

$$G(x,x') = G^{\infty}(x,x') + g(x,x') \tag{17.1}$$

のようにします。$g(x,x')$ は次の条件から探します。

- $g(x,x')$ は相反性をみたす
- $g(x,x')$ は微分方程式 $\mathscr{L}g(x,x') = 0$ をみたす
- $G(x,x') = G^{\infty}(x,x') + g(x,x')$ は境界で 0 になる

前章で求めたものも含めて、微分方程式と基本解のリストを次にまとめておきます。

17.2 一次元境界値問題

$G(x,0) = 0, G(x,a) = 0$ のように、境界値 $= 0$ の境界条件がついている場合は素直に積分できます。

例題 次のヘルムホルツ型微分方程式の境界値問題について考えよう。$L > 0$ とする。

$$\frac{d^2}{dx^2}u(x) + u(x) = -f(x),\ u(0) = 0, u(L) = 0 \tag{17.2}$$

外向き波の基本解 $G^{\infty}(x,x')$(→ 式 16.11) に対し、グリーン関数を $G(x,x') = \mathrm{Re}G^{\infty}(x,x') + g(x,x')$ で表す。

(1) $\left(\frac{d^2}{dx^2}+1\right)g(x,x') = 0$ をみたす $g(x,x')$ をすべて求めよ。

(2) (1) で求めた解に相反性を課し、$g(x,x')$ を構成せよ。
(3) 境界条件から $G(x,x')$ を求めよ。

解答 ヘルムホルツ型の基本解は既に求めているので、$q=1$ としてこれを用います。

(1) $\cos x, \sin x$ の 2 つしかありません。

(2) (1) の解に対し、相反性に着目すれば $\cos(x+x'), \cos(x-x'), \sin(x+x')$ が ((1) で与えた方程式の) 解になっていることがわかります。[*1] これらの線形結合から

$$g(x,x') = c_1\cos(x-x') + c_2\cos(x+x') + c_3\sin(x+x')$$

とすると都合が良いです。

(3) $\mathrm{Re}G^\infty(x,x') = \mathrm{Re} \pm \frac{i}{2}e^{\pm i|x-x'|} = -\frac{1}{2}\sin|x-x'|$ より (Re は実部を取る記号)

$$G(x,x') = -\frac{1}{2}\sin|x-x'| + c_1\cos(x-x') + c_2\cos(x+x') + c_3\sin(x+x')$$

であり、境界条件 $G(0,x')=0$ から、$0<x'<L$ に注意して

$$\begin{aligned} G(0,x') &= -\frac{1}{2}\sin|-x'| + (c_1+c_2)\cos x' + c_3\sin x' \\ &= \left(\frac{1}{2}+c_3\right)\sin x' + (c_1+c_2)\cos x' = 0 \end{aligned}$$

が得られ、x' の任意性から $c_2=-c_1, c_3=-\frac{1}{2}$ となります。また、一方で境界条件 $G(L,x')=0$ から

$$\begin{aligned} G(L,x') &= -\frac{1}{2}\sin|L-x'| + c_1\cos(L-x') + c_2\cos(L+x') + c_3\sin(L+x') \\ &= -\frac{1}{2}\big(\sin(L-x')+\sin(L+x')\big) + c_1\big(\cos(L-x')-\cos(L+x')\big) \\ &= -\sin L\cos x' + 2c_1\cos L\cos x' = \cos x'\big(-\sin L + 2c_1\cos L\big) = 0 \end{aligned}$$

が得られます。これより $c_1 = \frac{1}{2}\tan L$ となり、$\mathrm{Re}G^\infty(x,x') + g(x,x')$ を計算して

$$G(x,x') = -\frac{1}{2}\sin|x-x'| + \frac{1}{2}\tan L\big(\cos(x-x')-\cos(x+x')\big) - \frac{1}{2}\sin(x+x')$$

としてグリーン関数が得られます。■

ちなみに上の問題で、微分方程式の解は $u(x) = \int_0^L G(x,x')f(x')$ で与えられます。

[*1] $\sin(x-x')$ は相反性をみたさないことに注意。

例題 境界値問題 $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f(x), y(0) = y(a) = 0$ を解こう。

(1) 基本解の方程式 $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} G^\infty(x, x') = -\delta(x - x')$ から $G^\infty(x, x')$ を求めよ。

(2) グリーン関数 $G(x, x') = G^\infty(x, x') + g(x, x')$ が境界条件 $G(0, x') = 0, G(a, x') = 0$ をみたすように $g(x, x')$ を決定せよ。

(3) 境界値問題の解を求めよ。

解答

(1) いくつか方法はありますが、ここではヘルムホルツ方程式

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2\right) G_k^\infty(x, x') = -\delta(x - x')$$

の（外向き）基本解 $G_k^\infty(x, x') = \dfrac{i}{2k} e^{ik|x-x'|}$ を用いて計算してみましょう。実部を取って $k \to 0$ とすると

$$G^\infty(x, x') = \lim_{k\to 0} \mathrm{Re}\left[\frac{i}{2k} e^{ik|x-x'|}\right] = -\lim_{k\to 0} \frac{\sin k|x - x'|}{2k} = -\frac{1}{2}|x - x'|$$

が得られます。

(2) $g(x, x')$ は斉次解なので $\dfrac{d^2}{dx^2} g(x, x') = 0$ をみたし、$g(x) = C_1 x + C_2$ すなわち $g(x, x') = C_1(x')x + C_2(x')$ のように取れます。境界条件より

$$G(0, x') = -\frac{1}{2}|-x'| + C_2(x') = 0$$
$$G(a, x') = -\frac{1}{2}|a - x'| + C_1(x')a + C_2(x') = 0$$

となり、

$$C_2(x') = \frac{1}{2}x',\ C_1(x') = \frac{1}{2} - \frac{x'}{a}$$

が得られ、これより $g(x, x')$ が決まります。

(3) (2) で $g(x, x')$ が決まったので、グリーン関数が次のように決まります。

$$G(x, x') = \begin{cases} x' - \frac{x}{a}x' & (x > x') \\ x - \frac{x'}{a}x & (x < x') \end{cases}$$

これを用いて $y(x) = \displaystyle\int_0^a f(x')G(x, x')dx'$ によって $y(x)$ が得られます。■

17.3 二次元、三次元の境界値問題

問題になるのは「グリーン関数を用いて解がどう構成できるか」「グリーン関数をどう構成するか」の二点です。

17.3.1 解の構成

ポアソン方程式やヘルムホルツ方程式の境界値問題についてグリーン関数を用意するために、100 ページのグリーンの第二公式 (8.4)、すなわち

$$\iiint d^3r'(u\Delta v - v\Delta u) = \iint_S d\boldsymbol{S} \cdot \Big(u\nabla v - v\nabla u\Big)$$

が役に立ちます。

例題 3 次元ポアソン方程式の境界値問題

$$\Delta\phi(\boldsymbol{r}) = -\rho(\boldsymbol{r})\ (\boldsymbol{r} \in V)\ ,\ \phi(\boldsymbol{r}) = h(\boldsymbol{r})\ (\boldsymbol{r} \in S)$$

について、この方程式の解をグリーン関数を用いて表せ。

解答 グリーンの第二公式において $u \to G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'), v \to \phi(\boldsymbol{r})$ とおくと

$$\iiint d^3r\Big(G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\Delta\phi(\boldsymbol{r}) - \phi(\boldsymbol{r})\Delta G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\Big) = \iint_S d\boldsymbol{S}\cdot\Big(G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\nabla\phi(\boldsymbol{r}) - \phi(\boldsymbol{r})\nabla G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\Big)$$

が成り立ち、ここで所与のポアソン方程式 $\Delta\phi = -\rho$ および、$\Delta G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = -\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')$ の関係を使うと左辺が変形でき、

$$\iiint d^3rG(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}) - \phi(\boldsymbol{r}') = \iint_S d\boldsymbol{S} \cdot \Big(G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\nabla\phi(\boldsymbol{r}) - \phi(\boldsymbol{r})\nabla G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\Big)$$

となります。ここでグリーン関数が境界で 0 になることから右辺第一項は 0 になり、$\phi(\boldsymbol{r})$ は境界で $h(\boldsymbol{r})$ になります。また、$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{r}'$ を入れ替え、相反性 $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = G(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})$ を用いると、次が得られます。

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \iiint d^3r'G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}') - \iint_{S'} d\boldsymbol{S}' \cdot h(\boldsymbol{r}')\nabla' G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \tag{17.3}$$

ただし S', ∇' は変数 $\boldsymbol{r}'$ に対するものとします。これで解が得られましたね。■

例題 3 次元ヘルムホルツ方程式の境界値問題

$$(\Delta + k^2)\phi(\boldsymbol{r}) = -\rho(\boldsymbol{r})\ (\boldsymbol{r} \in V)\ ,\ \phi(\boldsymbol{r}) = h(\boldsymbol{r})\ (\boldsymbol{r} \in S)$$

について、この方程式の解をグリーン関数を用いて表せ。

解答 グリーンの第二公式において $u \to G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'), v \to \phi(\boldsymbol{r})$ とおくと、

$$\iiint d^3r\Big(G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\Delta\phi(\boldsymbol{r}) - \phi(\boldsymbol{r})\Delta G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\Big) = \iint_S d\boldsymbol{S}\cdot\Big(G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\nabla\phi(\boldsymbol{r}) - \phi(\boldsymbol{r})\nabla G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\Big)$$

左辺は

$$\iiint d^3r\Big(G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\Delta\phi(\boldsymbol{r})-\phi(\boldsymbol{r})\Delta G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\Big)$$
$$=\iiint d^3r\Big(G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\underbrace{(\Delta+k^2)\phi(\boldsymbol{r})}_{-\rho(\boldsymbol{r})}\cancel{-k^2G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\phi(\boldsymbol{r})}$$
$$-\phi(\boldsymbol{r})\big(\underbrace{(\Delta+k^2)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}_{-\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}\cancel{-k^2G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}\big)\Big)$$
$$=-\iiint d^3rG(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r})+\phi(\boldsymbol{r}') \tag{17.4}$$

となり、右辺は

$$\iint_S d\boldsymbol{S}\cdot\Big(\underbrace{G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}_{\text{境界条件より }0}\nabla\phi(\boldsymbol{r})-\phi(\boldsymbol{r})\nabla G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\Big)=-\iint_S d\boldsymbol{S}\cdot\phi(\boldsymbol{r})\nabla G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \tag{17.5}$$

となります。ここで $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{r}'$ を取り替えて、相反性を用いれば

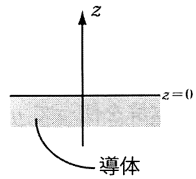
$$\phi(\boldsymbol{r})=\iiint d^3r'G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')-\iint_{S'}d\boldsymbol{S}'h(\boldsymbol{r}')\nabla'G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$$

が得られます。ただし S',∇' は変数 $\boldsymbol{r}'$ に対するものとします。これで解が得られました。■

17.3.2　境界があるときの静電ポテンシャル（鏡像法）

鏡像法によるグリーン関数の構成法について解説します。要するに基本解の変数をいじって、適当な組み合わせで足し合わせることでグリーン関数を作る方法です。ここでは具体問題を扱うと割り切って、特に**ポアソン方程式のディリクレ問題**[*2] に注目します。

例えば図のように、$z=0$ が境界になっている場合を考えましょう。境界条件を $\phi(x,y,0)=f(x,y)$ とし、$z>0$ での静電ポテンシャル $\phi(x,y,z)$ を求めるとします。基本解は



$$G^\infty(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

であり、これは $z=0$ で境界条件 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=0$ をみたしません。そこで、境界条件をみたすグリーン関数 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ を

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=G^\infty(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+\sum_i g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_i)$$

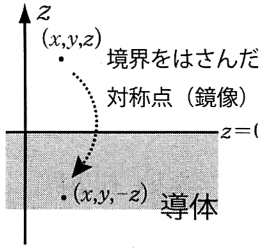
のように構成します。$g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_i)$ をどう選ぶかが問題です。本章冒頭で扱ったように、

*2　領域 V と境界 S に対し、$\boldsymbol{r}\in V$ で $\Delta\phi(\boldsymbol{r})=-\rho(\boldsymbol{r})$ かつ、$\boldsymbol{r}\in S$ で $\phi(\boldsymbol{r})=h(\boldsymbol{r})$ が成り立つとき、$\phi(\boldsymbol{r})$ を求めよ、という問題です。一方、境界条件が $\boldsymbol{n}\cdot\nabla\phi(\boldsymbol{r})=h(\boldsymbol{r})$ で与えられた場合はノイマン問題と呼ばれます。

1.　$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ が境界条件をみたすこと
2.　$g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_i)$ が斉次解であること
3.　$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ が相反性をみたすこと

の 3 条件をどう使うかが鍵です。

そこで、図のようにまず適当な点 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$（ただし $z>0$）を取り、これに対して鏡像点、すなわち境界をはさんだ対称点 $\boldsymbol{r}_1=(x,y,-z)$（$z>0$）をとりましょう。すると $\boldsymbol{r}_1$ は考えている領域 $z>0$ にはないので、基本解をいじって



$$g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1)=-\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1'|}\quad(\boldsymbol{r}_1'=(x',y',-z'))$$

と取ると $z>0$ では $\Delta g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1)=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1')=0$ が成り立ち、[*3] 条件 2. をみたしていることが確かめられます。また、

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=G^{\infty}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1')=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}-\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1'|}\right)$$

ととれば条件 1. と条件 3. を同時にみたしていることがわかります。ポイントは g の符号が G^{∞} と逆であることです。[*4] これでグリーン関数が構成できましたね。

次の境界値問題を解け。

$$\begin{cases}\triangle_2 u:=\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u(x,y)=-f(x,y) & (-\infty<x<\infty,\ y>0)\\ u(x,0)=h(x) & (-\infty<x<\infty)\end{cases}$$

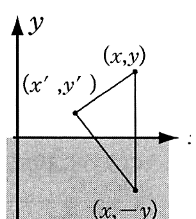
ただし、2 次元ポアソン方程式の基本解が

$$G^{\infty}(x,x',y,y')=-\frac{1}{4\pi}\log\left[(x-x')^2+(y-y')^2\right]$$

で与えられることは使ってよい。

解答　境界を切る直線 $x=0$ を通して、(x,y) に対する鏡像点 $(x,-y)$ についての基本解を使って $g(x,x',y,y')=-G(x,x',-y,y)$ とするとあっさり解決します。

$$G^{\infty}(x,x',y,y')=-\frac{1}{4\pi}\log\left[(x-x')^2+(y-y')^2\right]$$



に対して $G(x,x',y,y')=G^{\infty}(x,x',y,y')-G^{\infty}(x,x',-y,y')$ とおくと G は境界条件

$$G(x,x',0,y')=0$$

[*3] $\boldsymbol{r}_1$ は領域 $z>0$ にはないので、考えている領域で $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1$ とはならないため。

[*4] 鏡像法は、単に位置が対称的であることだけではなく、電荷も対称にするのがミソです。この電荷の符号が、グリーン関数の符号に現れてくるわけです。

をみたすグリーン関数になることがわかります。

$$G(x,x',y,y') = \frac{1}{4\pi}\log\frac{(x-x')^2+(y+y')^2}{(x-x')^2+(y-y')^2} \tag{17.6}$$

ここでポアソン方程式のディリクレ問題の解は式 (17.3) の 2 次元バージョンで

$$u(\boldsymbol{r}) = \iint dxdyG(x,x',y,y')u(x',y') - \int dx'\ h(x')\frac{\partial}{\partial n}G(x,x',y,0) \tag{17.7}$$

と書けます。境界の法線方向での微分は（境界を切る x 軸について垂直な方向なので）

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial(-y')}$$

であるから、解は

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{r}) &= \iint dxdyG(x,x',y,y')u(x',y') - \int dx'\ h(x')\frac{\partial}{\partial n}G(x,x',y,0) \\ &= \iint dxdyG(x,x',y,y')u(x',y') + \int dx'\ h(x')\left.\frac{\partial G(x,x',y,y')}{\partial y'}\right|_{y'=0} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}dx\int_0^{\infty}dy\frac{1}{4\pi}\log\frac{(x-x')^2+(y+y')^2}{(x-x')^2+(y-y')^2}u(x',y') + \int_{-\infty}^{\infty}dx'\frac{1}{\pi}\frac{h(x')y}{(x-x')^2+y^2} \end{aligned}$$

として答えを得ます。■

17.4 再び一次元問題・常微分方程式の方法*

ここでは全く異なるアプローチとして、斉次解からグリーン関数を構成する方法を紹介します。まずは問題設定をこしらえておきましょう。

Sturm-Liouville問題（ストゥリム・リウビル）

定義 17.1 演算子 $\mathscr{L} = \dfrac{d}{dx}p(x)\dfrac{d}{dx} + q(x)$ の固有値問題、すなわち次の境界値問題を Sturm-Liouville 問題と呼ぶ。

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left[p(x)\dfrac{du(x)}{dx}\right] + q(x)u(x) = -f(x) \quad (a < x < b) \\ a_1u(a) + a_2u'(a) = 0 \\ b_1u(b) + b_2u'(b) = 0 \end{cases}$$

ただし a_1, a_2, b_1, b_2 は定数で、a_1, a_2 (b_1, b_2) の少なくともどちらかは 0 でないする。また、$p(x) > 0$ とする。

ここでグリーン関数の境界条件は

$$a_1G(a,x') + a_2\frac{d}{dx}G(a,x') = 0$$

$$b_1 G(b,x') + b_2 \frac{d}{dx} G(b,x') = 0$$

および

$$\lim_{x \to x'+0} \frac{d}{dx} G(x,x') - \lim_{x \to x'-0} \frac{d}{dx} G(x,x') = -\frac{1}{p(x')} \tag{17.8}$$

で与えられます。[*5] この問題に対して、有力な解法が存在します。先に結果から述べておきましょう。

$$G(x,x') = \begin{cases} A_1(x')u_a(x) + A_2(x')u_b(x) & (a \le x < x') \\ B_1(x')u_a(x) + B_2(x')u_b(x) & (x' < x \le b) \end{cases} \tag{17.9}$$

とおいてみると、[*6] を用いて次の定理が得られます。

グリーン関数の具体形

定理 17.1 斉次方程式 $\mathscr{L}u = 0$ の解 u のうち、$x = a, b$ での境界条件をみたすものを $u_a(x)$, $u_b(x)$ とおく。このとき、

$$W(x) = \bigl(u_b(x)u_a'(x) - u_a(x)u_b'(x)\bigr)p(x) = (\text{定数})$$

をみたし、グリーン関数は次のように書ける。

$$G(x,x') = \begin{cases} \dfrac{u_b(x')u_a(x)}{W(0)} & (a \le x < x') \\ \dfrac{u_a(x')u_b(x)}{W(0)} & (x' < x \le b) \end{cases}$$

(証明) まず $\dfrac{d}{dx}G(x,x') = G'(x,x')$ としておきます。式 (17.9) のように仮定し、グリーン関数である条件から境界条件を参照して、

$$a_1 G(a,x') + a_2 G'(a,x') = A_1(x') \underbrace{[a_1 u_a(a) + a_2 u_a'(a)]}_{\text{境界条件より } 0} + A_2(x')[a_1 u_b(a) + a_2 u_b'(a)]$$

$$b_1 G(a,x') + b_2 G'(a,x') = B_1(x')[b_1 u_a(b) + b_2 u_a'(b)] + B_2(x') \underbrace{[b_1 u_b(b) + b_2 u_b'(b)]}_{\text{境界条件より } 0}$$

と書け、u_a、u_b についての境界条件から

$$A_2(x')[a_1 u_b(a) + a_2 u_b'(a)] = 0 \tag{17.10}$$

$$B_1(x')[b_1 u_a(b) + b_2 u_a'(b)] = 0 \tag{17.11}$$

となり、[ ] 内は 0 にはならないので[*7] $A_2(x') = B_1(x') = 0$ が成立します。よって

$$G(x,x') = \begin{cases} A_1(x')u_a(x) & (a \le x < x') \\ B_2(x')u_b(x) & (x' < x \le b) \end{cases}$$

---

*5 証明は省略しますが、式 (17.8) かつ $\mathscr{L}G(x,x') = 0$ の性質が $\mathscr{L}G = -\delta(x - x')$ と同値になります。

*6 もともとグリーン関数は $\mathscr{L}G(x,x') = -\delta(x - x')$ をみたすような関数であり、$x \neq x'$ のとき右辺は 0 なので、G 自身が斉次解の重ねあわせで書けるというのは直感的に難しくないはずです。

*7 あるいは「0 になるとは限らないので、一般的に考えると」とするべきでしょうか。ちなみに [ ] 内が 0 になってしまうときは、別な方法を考えなくてはなりません。

と書け、グリーン関数の $x = x'$ での連続性から

$$A_1(x')u_a(x') = B_2(x')u_b(x') \tag{17.12}$$

が得られます。

一方、グリーン関数の条件 (17.8) から

$$B_2(x')u_b'(x') - A_1 u_a'(x') = -\frac{1}{p(x')} \tag{17.13}$$

が得られます。式 (17.12) と式 (3.2.7) を連立させて A_1, B_2 を求めると、

$$A_1(x') = \frac{u_a(x')}{(u_a(x')u_b'(x') - u_b(x')u_a'(x'))p(x')} \tag{17.14}$$

$$B_2(x') = \frac{u_b(x')}{(u_a(x')u_b'(x') - u_b(x')u_a'(x'))p(x')} \tag{17.15}$$

u_a、u_b はどちらも $\mathscr{L}$ の斉次解なので $u_a\mathscr{L}u_b = 0$ および $u_b\mathscr{L}u_a = 0$ となることから、$\mathscr{L} = p(x)\dfrac{d^2}{dx^2} + p'(x)\dfrac{d}{dx} + q(x)$ であることに気をつけると

$$u_b p(x)u_a'' + u_b p'(x)u_a' + u_a u_b q = 0 \tag{17.16}$$

$$u_a p(x)u_b'' + u_a p'(x)u_b' + u_a u_b q = 0 \tag{17.17}$$

となり、辺々引いて $\dfrac{u_b u_a'' - u_a u_b''}{u_b u_a' - u_a u_b'} = -\dfrac{p'(x)}{p(x)}$ を得ます。$\dfrac{d}{dx}(u_b u_a' - u_a u_b') = u_b u_a'' - u_a u_b''$ であることに気をつけると、この式は常微分方程式

$$\frac{\dfrac{d}{dx}(u_b u_a' - u_a u_b')}{u_b u_a' - u_a u_b'} = -\frac{p'(x)}{p(x)}$$

であり、変数分離して積分し、

$$\Big(u_b(x)u_a'(x) - u_a(x)u_b'(x)\Big)p(x) = (\text{定数})$$

という関係を得ることができ、

$$\Big(u_b(0)u_a'(0) - u_a(0)u_b'(0)\Big)p(0) = \Big(u_b(x)u_a'(x) - u_a(x)u_b'(x)\Big)p(x).$$

この式を式 (17.14)(17.15) に代入してやれば定理が得られます。□

例題 次の境界値問題のグリーン関数を求めよ。

$$\frac{d^2}{dx^2}u(x) + k^2u(x) = -f(x)\ (0 < x < L),\ u(0) = 0,\ u(L) = 0$$

解答 与えられた問題に対応するグリーン関数の境界条件は $G(0, x') = 0$, $G(L, x') = 0$ であり、斉次解 u_0, u_L もこれに対応する関数になります。

斉次方程式

$$\frac{d^2}{dx^2}u(x) + k^2 u(x) = 0 \ (0 < x < L)$$

の解は $\cos kx$, $\sin kx$ の線形結合であり、$x = 0$, L での境界条件をみたす斉次解を u_0, u_L とおくと

$$u_0(x) = c_1 \sin kx$$
$$u_L(x) = c_2 \sin k(L - x)$$

のように書くことができます。$p(x) = 1$ より $W(0)$ が

$$W(0) = u_L(0)u_0'(0) - u_0(0)u_L'(0) = k \sin kL$$

となるから、

$$G(x, x') = \begin{cases} \dfrac{\sin kx \sin k(L - x')}{k \sin kL} & (0 < x < x') \\[2ex] \dfrac{\sin k(L - x) \sin kx'}{k \sin kL} & (x' < x < L) \end{cases}$$

としてグリーン関数を得ます。■

17.5 固有関数展開法*

固有値問題

$$\mathscr{L} u(x) = \lambda u(x) \tag{17.18}$$

が解けて $u(x) = u_n(x), \lambda = \lambda_n$ として固有関数、固有値が求められたとします。このとき式 (17.18) に対応するグリーン関数が $(\mathscr{L} - \lambda)G(x, x') = -\delta(x, x')$ として書けることがわかります。以下では $u_n(x)$ が完全規格直交系をなしているとしましょう。このとき、

$$G(x, x') = \sum_n g_n(x')u_n(x) \tag{17.19}$$

と仮定すると $g_n(x')$ が求められればグリーン関数が得られることになります。そこで、左から $(\mathscr{L} - \lambda)$ を作用させてみると、

$$\begin{aligned}(\mathscr{L} - \lambda)\sum_n g_n(x')u_n(x) &= \sum_n g_n(x')(\mathscr{L} - \lambda)u_n(x) \\ &= \sum_n g_n(x')(\lambda_n - \lambda)u_n(x) \end{aligned} \tag{17.20}$$

と書くことができます。ところで、式 (17.20 左辺) はもともと式 (??) に等しいので、u_n の完全性

$$\delta(x - x') = \sum_n u_n(x)u_n^*(x')$$

を用いれば

$$\sum_n g_n(x')(\lambda_n - \lambda)u_n(x) = \sum_n u_n(x)u_n^*(x')$$

という式を得ることができ、和の中を比較して $g_n(x') = \dfrac{u_n^*(x')}{\lambda_n - \lambda}$ という g_n をとることができ、これによってグリーン関数が

$$G(x, x') = \sum_n \frac{u_n^*(x')u_n(x)}{\lambda_n - \lambda}$$

として与えられることがわかります。

17.6　演習問題

1　$x, y \geq 0$ の領域での 3 次元ポアソン方程式の境界値問題

$$\Delta\phi(\boldsymbol{r}) = -\rho(\boldsymbol{r}),\ \phi(x, 0, z) = f(x, z)\ (x \geq 0),\ \phi(0, y, z) = g(y, z)\ (y \geq 0)$$

について次の問に答えよ。

(1)　平面 $x = 0$(yz 平面) と平面 $y = 0$ (xz 平面) に導体板がある場合にグリーン関数を構成せよ。　ヒント：$x > 0,\ y > 0$ の領域にある点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ に置かれた点電荷 q が $x,\ y > 0$ の領域に作る電場を求めるときには、鏡像電荷として $(-x, y, z)$ に $-q$、$(x, -y, z)$ に $-q$、$(-x, -y, z)$ に q の電荷を置けばよいことを参考にせよ。

(2)　(1) で考えたグリーン関数が境界条件と相反性をみたすことを確認せよ。

2　原点を中心とし、半径 a の球面を境界とするポアソン方程式の境界値問題

$$\Delta\phi(\boldsymbol{r}) = -\rho(\boldsymbol{r})\ (|\boldsymbol{r}| < a),\ \ \phi(|\boldsymbol{r}| = a) = f(\boldsymbol{r})$$

について、ポアソン方程式の基本解 $G^\infty(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ と $|\boldsymbol{r}_1| > a$ をみたす定ベクトル $\boldsymbol{r}_1$ に対しグリーン関数を $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = G^\infty(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') - cG^\infty(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'_1)$ と取り、相反性と境界条件をみたすように c を決定せよ。また、2 次元の境界値問題ではグリーン関数はどう構成できるか。

3　次の境界値問題のグリーン関数を求めよ。

$$\frac{d^2}{dx^2}u(x) + k^2u(x) = -f(x)\ (0 < x < L),\ u(0) = 0,\ u'(L) = 0$$

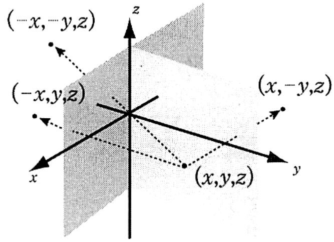
解答

1　鏡像法の問題です。

(1)　図のように (x, y, z) を取り、対応する鏡像点を 3 つ用意します。ここで $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ に対し $\boldsymbol{r}_1 = (-x, y, z), \boldsymbol{r}_2 = (x, -y, z), \boldsymbol{r}_3 = (-x, -y, z)$ とおきましょう。$G^\infty(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \dfrac{1}{4\pi|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}$ を用いて

$$G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} - \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'_1|} - \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'_2|} + \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'_3|}$$

とします。相反性をみたすために（偶数項必要）最後の項がつくわけです。



(2)　きちんと書き下すと (1) で求めたグリーン関数は次のようになります。

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x+x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y+y')^2+(z-z')^2}}+\frac{1}{\sqrt{(x+x')^2+(y+y')^2+(z-z')^2}}\right)$$

$(x,y,z)\leftrightarrow(x',y',z')$ の取り替えでグリーン関数が不変であることはすぐ確かめられますね。また、$x=0, y=0$ で $G=0$ となり、境界条件もみたすことがわかります。

2　$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\dfrac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}-\dfrac{c}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1'|}$ と取ります。簡単のため、z 軸上に全ての点 $\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_1',\boldsymbol{a}$（ただし $\boldsymbol{a}$ は球上の点）を用意し、$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r}_1'=a^2$ を仮定します（これが鏡像法の仮定）。このとき、$\dfrac{a}{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{r}'|}=\dfrac{|\boldsymbol{r}'|}{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{r}_1'|}$ が成り立ち、[*8] $G(\boldsymbol{a},\boldsymbol{r}')=\dfrac{1}{4\pi|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{r}'|}-\dfrac{c}{4\pi|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{r}_1'|}=0$（境界条件）より $c=\dfrac{r_1}{a}$ ととれば良いことがわかります。$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\dfrac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}-\dfrac{r_1}{4\pi a|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'_1|}$ は斉次方程式 $\Delta G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ をみたし（$\boldsymbol{r}_1$ が球外にあるため）、$G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})=\dfrac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}-\dfrac{r_1}{4\pi a|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_1|}=G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ となって相反性も満足します。
ちなみに、二次元では同様にグリーン関数を $\boldsymbol{\rho}=(x,y)$ に対し $G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho})=-\dfrac{1}{2\pi}\ln|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|+\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{a|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_1'|}{\rho_1'}$ ととると上手くいきます。

3　せっかくですから常微分方程式の手法を使ってみましょう。斉次解は $\sin kx$ と $\cos kx$ の線形結合で書けるから、$x=0,\ L$ で境界条件をみたす解を $u_0(x),\ u_L(x)$ とおくと

$$u_0(x)=\sin kx\ ,\ u_L(x)=\cos k(x-L)$$

と書け、これより $W(0)=k\cos kL$ となり、よって

$$G(x,x')=\begin{cases}\dfrac{\cos k(x'-L)\sin kx}{k\cos kL} & (0<x<x')\\[2ex] \dfrac{\sin kx'\sin k(x-L)}{k\cos kL} & (x'<x<L)\end{cases}$$

を得ます。■

[*8] $\boldsymbol{a}$ だけを z 軸上に取らないようにすると、三角形の相似性から示せます。

付録 A

グリーン関数の基本解をひたすら計算してみた

ここでは様々な微分方程式の型に対してグリーン関数の基本解をひたすら求めていきます。本編で扱ったよりも丁寧に計算し、因果律や波の広がり方もここで詳しく見て行きます。

A.1 定常状態の拡散方程式を解く

次の微分方程式を解きましょう。

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \mu^2\right)G^{\infty}(x, x') = -\delta(x - x') \tag{A.1}$$

$G^{\infty}(x, x')$ のフーリエ変換を

$$g(k, x') = \int_{-\infty}^{\infty} G^{\infty}(x, x')e^{-ikx}dx$$

とおき、デルタ関数のフーリエ変換が

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x')e^{-ikx}dx = e^{-ikx'}$$

となることに注意すれば、式 (A.1) の両辺をフーリエ変換したものは

$$-k^2 g(k, x') - \mu^2 g(k, x') = -e^{-ikx'}$$

となり、[*1] ここから $g(k, x') = \dfrac{e^{-ikx'}}{k^2 + \mu^2}$ が得られます。

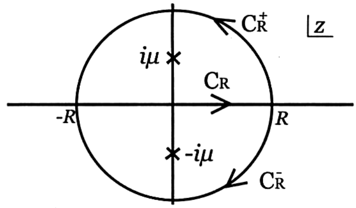
---

*1 $f(x)$ のフーリエ変換を $\mathscr{F}[f]$ と書くことにすると、微分のフーリエ変換の公式

$$\mathscr{F}[\tfrac{d}{dx}f(x)] = ik\mathscr{F}[f]$$

と書けることを用います。すなわち $\mathscr{F}[\frac{d^2}{dx^2}G] = -k^2 g$ と書けるわけです。

これを逆変換すれば基本解 $G(x,x')$ が



$$G^{\infty}(x,x') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ik(x-x')}}{k^2+\mu^2}dk$$

となります。これを複素積分で計算しましょう。

$$G_R^{\infty}(x,x') = \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\frac{e^{iz(x-x')}}{z^2+\mu^2}dz \tag{A.2}$$

を考えて $R\to\infty$ とします。

$x-x'>0$ のとき

$$G_R^{\infty}(x,x')\frac{1}{2\pi}\int_{C_R+C_R^+}\frac{e^{iz(x-x')}}{z^2+\mu^2}dz - \frac{1}{2\pi}\int_{C_R^+}\frac{e^{iz(x-x')}}{z^2+\mu^2}dz$$

とし、右辺第一項は留数定理から $\frac{1}{2\pi}\times 2\pi i\times\frac{e^{-\mu(x-x')}}{2i\mu} = \pi\frac{e^{-\mu(x-x')}}{\mu}$ となり、右辺第二項はジョルダンの補助定理 (定理 12.3) から $R\to\infty$ で 0 となります。これより $G^{\infty}(x,x') = \frac{\pi}{\mu}e^{-\mu(x-x')}$ が得られます。

$x-x'<0$ のとき

$$G_R^{\infty}(x,x') = \frac{1}{2\pi}\int_{C_R+C_R^-}\frac{e^{iz(x-x')}}{z^2+\mu^2}dz - \frac{1}{2\pi}\int_{C_R^-}\frac{e^{iz(x-x')}}{z^2+\mu^2}dz$$

とし、右辺第一項は留数定理から $\frac{1}{2\pi}\times(-2\pi i)\times\frac{e^{\mu(x-x')}}{-2i\mu} = \pi\frac{e^{\mu(x-x')}}{\mu}$ となり、右辺第二項はジョルダンの補助定理 (定理 12.3) から $R\to\infty$ で 0 となります。これより $G^{\infty}(x,x') = \frac{1}{2\mu}e^{\mu(x-x')}$ が得られます。

これらの結果をまとめると次の結果が得られます。

$$G^{\infty}(x,x') = \frac{1}{2\mu}e^{-\mu|x-x'|}$$

A.2　3 次元定常状態の拡散方程式を解く

3 次元拡散方程式の基本解を求めましょう。次の偏微分方程式を解きます。

$$(\triangle-\mu^2)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\rho(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{A.3}$$

$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ のフーリエ変換を $g(\boldsymbol{k},\boldsymbol{r}')$ とし、拡散方程式両辺をフーリエ変換すれば、

$$(-\boldsymbol{k}^2-\mu^2)g(\boldsymbol{k},\boldsymbol{r}') = -\exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}')$$

となり、これにより $g(\boldsymbol{k},\boldsymbol{r}')$ が、

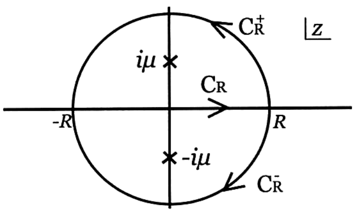
$$g(\boldsymbol{k},\boldsymbol{r}') = \frac{1}{\boldsymbol{k}^2+\mu^2}\exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}')$$

として求められ、$k=|\boldsymbol{k}|$、および $\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$ のなす角を θ として、$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$ に k_z を取り直し、両辺をフーリエ逆変換して

$$
\begin{aligned}
G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\boldsymbol{k}\frac{1}{\boldsymbol{k}^2+\mu^2}\exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}')\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty dk k^2\int_0^\pi d\theta\sin\theta\int_0^{2\pi}d\phi\frac{1}{k^2+\mu^2}\exp(ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\cos\theta)\\
&= \frac{1}{2\pi^2|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\int_0^\infty\frac{k\sin(k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{k^2+\mu^2}dk\\
&= \frac{1}{4\pi^2|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\int_{-\infty}^\infty\frac{k\sin(k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{k^2+\mu^2}dk \quad \text{(上式の被積分関数は偶関数なので)}\\
&= \frac{1}{4\pi^2|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\Im\int_{-\infty}^\infty\frac{k\exp(ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{k^2+\mu^2}dk
\end{aligned}
$$

となります。この積分を計算するために、次の式を準備しておきましょう。

$$
I_R = \int_{-R}^R\frac{k\exp(ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{k^2+\mu^2}dk
$$



これを計算するために、図の経路 C_R および C_R^+ を用意して複素積分を行いましょう。つまり、

$$
I_R = \oint_{C_R+C_R^+}\frac{z\exp(iz|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{z^2+\mu^2}dz - \int_{C_R^+}\frac{k\exp(iz|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{z^2+\mu^2}dz
$$

と書き換えて右辺を求めればよいわけです。右辺第一項は留数定理から（被積分関数の極は $\pm i\mu$ でどちらも 1 位。経路内に含まれる特異点は $i\mu$ のみなので）$\pi i\exp(-\mu|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)$ となり、右辺第二項はジョルダンの補助定理によって 0 になるので $I_R=\pi i\exp(-\mu|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)$ とわかります。これで $R\to\infty$ として

$$
G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\exp(-\mu|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)
$$

が得られます。

A.3 ヘルムホルツ方程式を解く

ヘルムホルツ方程式

$$
\left(\frac{d^2}{dx^2}+k^2\right)G^\infty(x,x') = -\delta(x-x') \tag{A.4}
$$

を解きましょう。慣習に従って文字 k を使ってしまったので、$G^\infty(x,x')$ のフーリエ変換を次のように定めておきます。ただし、以下では $G^\infty(x,x')$ を省略して $G(x,x')$ のようにも記します。

$$
g(u,x') = \int_{-\infty}^\infty dx G(x,x')e^{-iux}
$$

ここで式 (A.4) の両辺をフーリエ変換すると

$$(-u^2+k^2)g(u,x') = -e^{-iux'} \tag{A.5}$$

となり、ここから $g(u,x')$ を求めてフーリエ逆変換してやれば、

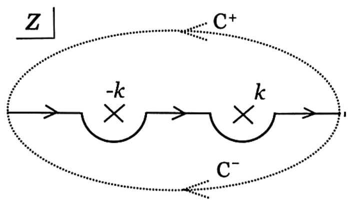
$$G(x,x') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} du g(u,x')e^{iux} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} du \frac{e^{iu(x-x')}}{u^2-k^2} \tag{A.6}$$

が得られます。前節同様、複素積分を用いてこの値を求めるのですが、**積分経路上に特異点 $k, -k$ が存在するため、（前節のような）安直な計算は許されません。**そのための工夫として、特異点を避けるような経路を作ってやるとうまく行きます。[*2]

経路 $\smile\smile\!\to$ に沿って積分する場合

図のように、経路 $\smile\smile\!\to$ と左右端をつなぐ経路 C^+、C^- を用意し、次の複素積分を求めます。

$$I_1 = \int_{\smile\smile} dz \frac{e^{iz(x-x')}}{z^2-k^2}$$



ジョルダンの補助定理を使うために $(x-x')$ の符号で場合わけをしておきます。

$x - x' > 0$ **のとき**

周回積分経路として $\smile\smile$ および C^+ を採用し、求めるべき I_1 を次のように分解します。

$$I_1 = \int_{\smile\smile+C^+} dz \frac{e^{iz(x-x')}}{z^2-k^2} - \int_{C^+} dz \frac{e^{iz(x-x')}}{z^2-k^2} \tag{A.7}$$

右辺第一項は、一位の極 $-k$、k を含む周回積分なので留数定理により

$$2\pi i\left(\frac{e^{-ik(x-x')}}{-2k} + \frac{e^{ik(x-x')}}{2k}\right) = -\frac{2\pi \sin k(x-x')}{k}$$

となり、第二項はジョルダンの補助定理より 0 になり、$I_1 = \dfrac{-2\pi\sin k|x-x'|}{k}$ が得られます。

[*2] 本節では特異点を避けるために**経路を動かしましたが**、別の方法として**経路はそのままで特異点の位置をずらす**という考え方もあります。

$x - x' < 0$ のとき

周回積分経路として $\smile\smile$ および C^- を採用し、求めるべき I_1 を次のように分解します。

$$I_1 = \int_{\smile\smile + C^-} dz \frac{e^{iz(x-x')}}{z^2 - k^2} - \int_{C^-} dz \frac{e^{iz(x-x')}}{z^2 - k^2} \tag{A.8}$$

右辺第一項は、特異点をまったく含まない経路による複素積分なので 0 になり、第二項はジョルダンの補助定理から 0 となります。これより、$I_1 = 0$ とわかり、式 (A.6) から

$$G(x, x') = \frac{1}{2\pi} I_1$$

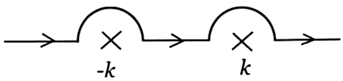
となることを用いて、グリーン関数の基本解が次のように得られます。

$$G_1(x, x') = \begin{cases} -\dfrac{\sin k|x - x'|}{k} & (x - x' > 0) \\ 0 & (x - x' < 0) \end{cases}$$

経路 $\frown\frown$ に沿って積分する場合

図のように経路をとって、次の積分を求めます。

$$I_2 = \int_{\frown\frown} dz \frac{e^{iz(x-x')}}{z^2 - k^2}$$



$x - x' > 0$ のとき

左右端をつなぐ経路 C^+ を用いて、次のように I_2 を分解します。

$$I_2 = \int_{\frown\frown + C^+} dz \frac{e^{iz(x-x')}}{z^2 - k^2} - \int_{C^+} dz \frac{e^{iz(x-x')}}{z^2 - k^2} \tag{A.9}$$

右辺第一項は特異点を含まない周回積分なので 0、第二項はジョルダンの補助定理により 0 になります。これより $I_2 = 0$ が得られます。

$x - x' < 0$ のとき

左右端をつなぐ経路 C^- を用いて、次のように I_2 を分解します。

$$I_2 = \int_{\frown\frown + C^-} dz \frac{e^{iz(x-x')}}{z^2 - k^2} - \int_{C^-} dz \frac{e^{iz(x-x')}}{z^2 - k^2} \tag{A.10}$$

右辺第一項は一位の極 k、$-k$ を含む周回積分なので、留数定理によって次のように求められます。

$$I_2 = -2\pi i \left(-\frac{e^{-ik(x-x')}}{2k} + \frac{e^{ik(x-x')}}{2k} \right) = 2\pi \frac{\sin k(x - x')}{k} = -2\pi \frac{\sin k|x - x'|}{k}$$

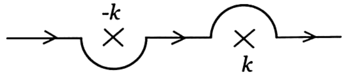
これより、グリーン関数の主要解 $G_2(x, x')$ は前項同様に次のようになります。

$$G_2(x, x') = \begin{cases} 0 & (x - x' > 0) \\ -\dfrac{\sin k|x - x'|}{k} & (x - x' < 0) \end{cases}$$

経路 に沿って積分する場合

図のように経路をとって、次の積分を求めます。

$$I_3 = \int dz \frac{e^{iz(x-x')}}{z^2-k^2}$$



$x-x'>0$ **のとき**

左右端をつなぐ経路 C^+ を用いて、次のように I_3 を分解します。

$$I_3 = \int_{+C^+} dz \frac{e^{iz(x-x')}}{z^2-k^2} - \int_{C^+} dz \frac{e^{iz(x-x')}}{z^2-k^2}$$

右辺第一項は一位の極 $-k$ のみを含むので、留数定理により $2\pi i \frac{e^{-ik(x-x')}}{-2k}$ となり、第二項はジョルダンの補助定理によって 0 となります。これより $I_3 = -2\pi i \frac{e^{-ik(x-x')}}{2k}$ が得られます。

$x-x'<0$ **のとき**

左右端をつなぐ経路 C^- を用いて、次のように I_3 を分解します。

$$I_3 = \int_{+C^-} dz \frac{e^{iz(x-x')}}{z^2-k^2} - \int_{C^+} dz \frac{e^{iz(x-x')}}{z^2-k^2}$$

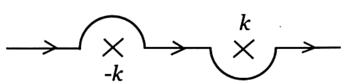
右辺第一項は一位の極 k のみを含む周回積分なので、留数定理により $-2\pi i \frac{e^{ik(x-x')}}{2k}$ となり、第二項はジョルダンの補助定理によって 0 となります。これより $I_3 = -2\pi i \frac{e^{ik(x-x')}}{2k}$ が得られます。$x-x'$ の符号についてまとめると、これまで同様に次の結果が得られます。

$$G_3(x,x') = -i \frac{e^{-ik|x-x'|}}{2k}$$

経路 に沿って積分する場合

図のように経路をとって、次の積分を求めます。

$$I_4 = \int dz \frac{e^{iz(x-x')}}{z^2-k^2}$$



$x-x'>0$ **のとき**

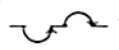
左右端をつなぐ経路 C^+ を用いて、次のように I_4 を分解します。

$$I_4 = \int_{+C^+} dz \frac{e^{iz(x-x')}}{z^2-k^2} - \int_{C^+} dz \frac{e^{iz(x-x')}}{z^2-k^2}$$

右辺第一項は一位の極 k のみを含む周回積分なので留数定理により $2\pi i \frac{e^{ik(x-x')}}{2k}$ となり、第二項はジョルダンの補助定理によって 0 となります。これより $I_4 = 2\pi i \frac{e^{ik(x-x')}}{2k}$ が得られます。

$x-x'<0$ のとき

左右端をつなぐ経路 C^- を用いて、次のように I_4 を分解します。



$$I_4 = \int_{\cdots+C^-} dz \frac{e^{iz(x-x')}}{z^2-k^2} - \int_{C^-} dz \frac{e^{iz(x-x')}}{z^2-k^2}$$

右辺第一項は一位の極 $-k$ のみを含む周回積分なので留数定理により $-2\pi i \dfrac{e^{-ik(x-x')}}{-2k}$ となり、第二項はジョルダンの補助定理から 0 となります。これより $I_4 = 2\pi i \dfrac{e^{-ik(x-x')}}{2k}$ が得られます。$x-x'$ の符号についてまとめると、これまで同様に次の結果が得られます。

$$G_4(x,x') = i\frac{e^{ii|x-x'|}}{2k}$$

このように積分経路が複数考えられるため、**ヘルムホルツ方程式のグリーン関数を求めるときは、どの経路を選んで積分すればよいかを境界条件（空間的な因果律）から判断する**ことが必要になってきます。次の表を見ながら、境界条件について考察しておきましょう。

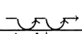
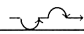
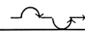
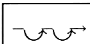
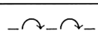
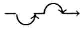
積分経路				
$x-x'>0$	$-\frac{\sin k\lvert x-x'\rvert}{k}$	0	$-\frac{i}{2k}e^{-ik(x-x')}$	$\frac{i}{2k}e^{ik(x-x')}$
$x-x'<0$	0	$-\frac{\sin k\lvert x-x'\rvert}{k}$	$-\frac{i}{2k}e^{ik(x-x')}$	$\frac{i}{2k}e^{-ik(x-x')}$
$G(x,x')$			$-\frac{i}{2k}e^{-ik\lvert x-x'\rvert}$	$\frac{i}{2k}e^{ik\lvert x-x'\rvert}$
x の境界条件	$G(x,x') \overset{x\leq x'}{=} 0$	$G(x,x') \overset{x'\leq x}{=} 0$	内向き → ←	外向き ← →

表 A.1　1次元ヘルムホルツ方程式のグリーン関数（主要解）

**(経路 1) と** **(経路 2) について**

それぞれ、$x\to-\infty$、$x\to+\infty$ としてやれば $G(x,x')\to 0$ となり、これが境界条件となります。片側の無限遠で 0 に収束することを表していますが、もう片側の無限遠では収束の保障がありません。これは境界がないことを表しているわけではありません。

**(経路 3) と** **(経路 4) について**

$|x-x'|$ を x と書き直すとそれぞれのグリーン関数は $G_3 \propto e^{-ikx}$、$G_4 \propto e^{ikx}$ となり、物理ではそれぞれ**内向き (波)**、**外向き (波)** と呼びます。由来は、指数の肩に時間位相因子 $-i\omega t$ をつけて固定してやることで、

$$\begin{cases} \text{内向き}: e^{-ikx-i\omega t} = e^{-i(kx+\omega t)=e^{i\phi}} & (\phi\text{を一定値に固定}) \\ \text{外向き}: e^{ikx-i\omega t} = e^{i(kx-\omega t)=e^{i\phi}} & (\phi\text{を一定値に固定}) \end{cases}$$

となり、それぞれ

$$\begin{cases} 内向き：x = \frac{1}{k}(-\phi - \omega t) & t\ が増加すると\ x\ は減少する（左向きの波）\\ 外向き：x = \frac{1}{k}(\phi + \omega t) & t\ が増加すると\ x\ も増加する（右向きの波）\end{cases}$$

となることから来ています。

A.4　3 次元ヘルムホルツ型

$$(\Delta + k^2)G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = -\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')$$

の基本解 $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ を外向き球面波の形で求めてみましょう。

$G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ のフーリエ変換を $g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{r}') = \int d^3\boldsymbol{r} G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \exp(-i\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r})$ とおけば、与式両辺のフーリエ変換は

$$(-u^2 + k^2)g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{r}') = -\exp(-i\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r}')$$

となります。これより $g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{r}') = \dfrac{1}{u^2 - k^2}\exp(-i\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r}')$ が得られ、$g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{r}')$ をフーリエ逆変換すれば $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ が得られます。$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$ のなす角を θ とおき、$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$ 方向に u_z を取り直せば $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ は

$$\begin{aligned}
G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\boldsymbol{u}\frac{1}{u^2 - k^2}\exp(i\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'))\\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty du u^2\frac{1}{u^2 - k^2}\int_0^\pi d\theta\sin\theta\exp(iu|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|\cos\theta)\int_0^{2\pi}d\phi\\
&= \frac{1}{2\pi^2|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\int_0^\infty du\frac{u}{u^2 - k^2}\sin(u|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|)\\
&= \frac{1}{4\pi^2|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\int_{-\infty}^\infty du\frac{u}{u^2 - k^2}\sin(u|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|)\\
&= \frac{1}{2i}\left\{\frac{1}{4\pi^2|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\int_{-\infty}^\infty du\frac{u}{u^2 - k^2}\exp(iu|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|)\right.\\
&\qquad\left. - \frac{1}{4\pi^2|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\int_{-\infty}^\infty du\frac{u}{u^2 - k^2}\exp(-iu|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|)\right\}
\end{aligned}$$

($\because\ \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$) となります。[*3] ここで、

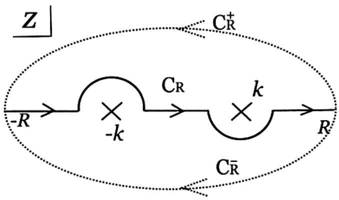
$$I_R = \int_{C_R} dz\frac{z}{z^2 - k^2}\exp(iz|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|),\ J_R = \int_{C_R} dz\frac{z}{z^2 - k^2}\exp(-iz|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|)$$

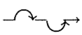
*3

$$= \frac{1}{4\pi^2|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\Im\int_{-\infty}^\infty du\frac{u}{u^2 - k^2}\exp(iu|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|)$$

と書かなかったのは、被積分関数の特異性に理由があり、$\Im$(Im, 虚部) をとると分母に影響があり別の値になってしまうからです。

とおいて、複素積分経路 C_R を調整して右辺を求めましょう。右辺は特異点を実軸上に持った積分なので直接求めることはできないので、図のような経路を考えて特異点を避けます。この経路のとり方は与えられた仮定「外向き波の境界条件」によります。[*4]



図の経路は実軸上の $\pm R$ を端点とした  型経路 C_R と、端点をつなぐ上下半円 C_R^+、C_R^- からなる。ジョルダンの補助定理を使うため経路に C_R^+ を採用し、I_R を次のように分解します。

$$I_R = \int_{C_R+C_R^+} dz \frac{z}{z^2-k^2} \exp(iz|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|) - \int_{C_R^+} dz \frac{z}{z^2-k^2} \exp(iz|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)$$

$I \equiv \lim_{R\to\infty} I_R$ が求めるべき式右辺の積分であるから、式を求めて極限をとればよく、式右辺第一項は一位の極 k のみを含む周回積分であるから、留数定理により

$$2\pi i \left\{ \frac{z}{z^2-k^2}(z-k)\exp(iz|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|) \right\} \Bigg|_{z=k} = \pi i \exp(ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)$$

となります。第二項はジョルダンの補助定理から $R \to \infty$ の極限で 0 になります。これより $I = \pi i \exp(ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)$ となります。

同様に J_R を求めましょう。経路に C_R^- を採用し、J_R を次のように分解します。

$$J_R = \int_{C_R+C_R^-} dz \frac{z}{z^2-k^2} \exp(-iz|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|) - \int_{C_R^-} dz \frac{z}{z^2-k^2} \exp(-iz|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|) \tag{A.11}$$

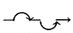
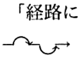
右辺第一項は一位の極 $-k$ のみを持つ負方向の周回積分なので、留数定理により $-\pi i \exp(-ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)$ となり、第二項はジョルダンの補助定理により $R \to \infty$ において 0 になります。これより $J \equiv \lim_{R\to\infty} J_R = \pi i \exp(ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)$ が得られ、、先の結果とあわせて

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi^2|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\frac{I-J}{2i} = \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\exp(ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)$$

となり、主要解が得られました。■

余談ですが、内向きの主要解は $\dfrac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\exp(-ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)$ になります。

ところで、外向き波の基本解を積分することで 1 次元ヘルムホルツ方程式の基本解を求めることができます。

[*4] 「経路に  を取るから外向き波の解ができる」というより、「外向き波の解ができるように  を用いる」のが正しいです。

まず $X=|x-x'|, Y=y-y', Z=z-z'$ とおきます。さらに $\rho=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$ とおいて 2 次元極座標で積分します。ヤコビアンは ρ であり、

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}dy\int_{-\infty}^{\infty}dzG(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') =&\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dY\int_{-\infty}^{\infty}dZ\frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}e^{ik\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\\ =&\frac{1}{4\pi}\int_{0}^{2\pi}d\theta\int_{X}^{\infty}d\rho e^{ik\rho}\\ =&\frac{i}{2k}e^{ikX}\end{aligned}$$

となって確かに 1 次元ヘルムホルツ方程式のグリーン関数が得られます。■

一般に高次元の基本解の方程式を積分して次元をひとつ落とすと低次元の基本解が得られます。

最後の式変形で使った積分公式

$$\int_{X}^{\infty}d\rho e^{ik\rho}=\frac{i}{k}e^{ikX}$$

を示しておきます。これは

$$\int_{X}^{\infty}e^{ik\rho}d\rho=\lim_{\epsilon\to 0}\int_{X}^{\infty}e^{ik\rho-\epsilon\rho}d\rho=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon-ik}e^{-(\epsilon+ik)X}=\frac{i}{k}e^{ikX}$$

より得られます。

A.5　時間付き方程式とフーリエ変換

ここでは時間付きの方程式を扱って行くことにします。物理では時間 t に関する $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ と逆変換 $f(t)$ を

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\omega t}dt,\ f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{-i\omega t}d\omega$$

と書くので、このテキストでもそれにならってこのように記述します。(k と ω の符号に注意！）本章のメインは拡散方程式（時間を純虚数にするとシュレディンガー方程式）と波動方程式です。

A.6　3 次元波動方程式とヘルムホルツ方程式の再考

遅延、先進グリーン関数の存在を吟味する例として 3 次元波動方程式を考えてみましょう。

$$\left(\triangle-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi(\boldsymbol{r},t)=-\rho(\boldsymbol{r},t)$$

基本解のみたす方程式は

$$\left(\triangle-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G^{\infty}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)=-\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(t-t') \tag{A.12}$$

であり、フーリエ変換によってこの方程式を解きます。ここで、時間変数を持つ方程式[*5] について考えているので、$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r'},t,t')$ のフーリエ変換を

$$g(\boldsymbol{k},\boldsymbol{r'},\omega,t') = \iiint_V d^3\boldsymbol{r} \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp\big[-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\big] G^{\infty}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r'},t,t') \quad \text{(A.13)}$$

とします。このことから、$g(\boldsymbol{k},\boldsymbol{r'},\omega,t')$ のフーリエ逆変換が

$$G^{\infty}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r'},t,t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \iiint_V d^3\boldsymbol{k} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp\big[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\big] g(\boldsymbol{k},\boldsymbol{r'},\omega,t') \quad \text{(A.14)}$$

として決定されます。[*6]

さて、式 (A.12) を両辺フーリエ変換すると（あるいは式 (A.14) を式 (A.12) に代入してデルタ関数の積分表示[*7] と比較すると）、

$$\left(-k^2+\frac{\omega^2}{c^2}\right) g(\boldsymbol{k},\boldsymbol{r'},\omega,t') = -\exp[-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r'}+\omega t')] \quad \text{(A.15)}$$

を得ることができ、これを式 (A.14) に代入すると、グリーン関数の基本解が

$$G^{\infty}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r'},t,t') = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_V d^3\boldsymbol{k} \exp[i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'})] \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d^3\omega \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}} \quad \text{(A.16)}$$

の形で得られます。この積分を計算すればよいのですが、式 (A.16) 右辺の最後の積分

$$G_t(t,t') \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}}$$

が積分区間内に特異点を含んでいます。この積分は、すでに扱った式 (A.6) と（符号や係数を合わせてやれば）まったく同じものであり、積分結果は 219 ページの表で分類し終わっているので、この結果を流用しておきましょう。

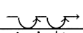
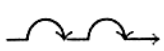
積分経路の取り方		
$t-t'>0$	$c^2\frac{\sin kc\lvert t-t'\rvert}{k}$	0
$t-t'<0$	0	$c^2\frac{\sin kc\lvert t-t'\rvert}{k}$
$G_t(t,t')$	$c^2\frac{\sin k\lvert t-t'\rvert}{kc}\theta(t-t')$	$c^2\frac{\sin kc\lvert t-t'\rvert}{kc}\theta(t'-t)$
t についての境界条件	$\lim_{t\to-\infty} G_t(t,t')=0$、遅延条件	$\lim_{t\to+\infty} G_t(t,t')=0$、先進条件

表 A.2 時間で考えた 1 次元ヘルムホルツ方程式のグリーン関数（主要解）

*5 しばしば動的方程式と呼びます。

*6 ここで積分領域 V は三次元空間全体を表します。

*7

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'})\delta(t-t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \iiint_V d^3\boldsymbol{k} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp\big[i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'})\big] \exp\big[-i\omega(t-t')\big]$$

に注意。

(経路 1) と (経路 2) について

遅延グリーン関数は $\theta(t-t')$ を含み、先進グリーン関数は $\theta(t'-t)$ を含みます。これに従えば、経路 で積分すれば遅延グリーン関数が、経路 で積分すれば先進グリーン関数が得られることがわかります。

本題に戻りましょう。符号を加味したステップ関数

$$\theta_\pm(t-t') \equiv \begin{cases} \theta(t-t') & (+) \\ \theta(t'-t) & (-) \end{cases}$$

を定義してやれば

$$G_t(t-t') = \frac{c}{k}\sin(ck|t-t'|)\theta_\pm(t-t')$$

として G_t が得られるので、求めるべきグリーン関数は

$$\begin{aligned}
G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t') &= \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_V d^3\boldsymbol{k}\exp[i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')]G_t(t-t') \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_V d^3\boldsymbol{k}\exp[i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')]\frac{c}{k}\sin(ck|t-t'|)\theta_\pm(t-t') \\
&= \frac{c}{2\pi^2|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\theta_\pm(t-t')\int_0^\infty dk\sin(k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\sin(ck|t-t'|) \\
&= \frac{c}{4\pi^2|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\theta_\pm(t-t')\int_{-\infty}^\infty dk\sin(k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\sin(ck|t-t'|) \\
&\quad (\because \sin\sin \text{は偶関数}) \\
&= \frac{1}{4\pi^2|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\theta_\pm(t-t')\int_{-\infty}^\infty dk\frac{\cos(k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-ck|t-t'|)}{2} \\
&\quad - \frac{1}{4\pi^2|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\theta_\pm(t-t')\int_{-\infty}^\infty dk\frac{\cos(k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|+ck|t-t'|)}{2} \\
&\quad \left(\text{三角関数の公式}\sin A\sin B = \frac{\cos(A-B)-\cos(A+B)}{2}\text{を用いた}\right) \\
&= \frac{c}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\theta_\pm(t-t')\left\{\delta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-c|t-t'|)-\delta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|+c|t-t'|)\right\} \qquad \text{(A.17)} \\
&= \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\theta_\pm(t-t')\delta\left(\tfrac{1}{c}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-|t-t'|\right) \qquad \text{(A.18)}
\end{aligned}$$

として得られます。[*8] 最後に、符号付きステップ関数 $\theta_\pm(t-t')$ において、$\theta_+(t-t') =$

[*8] ただし式 (A.17) ではデルタ関数の積分表示 (→ 付録)

$$\delta(X) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{ikX}dk$$

$$\delta(X) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{-ikX}dk$$

$\theta(t-t')$ を採用するなら遅延グリーン関数

$$G_{\rm ret}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r'},t,t') = \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|}\theta(t-t')\delta(\tfrac{1}{c}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|-|t-t'|) \quad \text{(A.19)}$$

$$= \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|}\delta(\tfrac{1}{c}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|-t+t') \quad \text{(A.20)}$$

が得られ、$\theta_-(t-t') = \theta(t'-t)$ を採用するなら先進グリーン関数

$$G_{\rm adv}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r'},t,t') = \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|}\theta(t'-t)\delta(\tfrac{1}{c}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|-|t-t'|) \quad \text{(A.21)}$$

$$= \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|}\delta(\tfrac{1}{c}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|+t-t') \quad \text{(A.22)}$$

が得られます。

ちなみに遅延条件の基本解を時間フーリエ変換すると、$T = t - t'$ において

$$\int_{-\infty}^{\infty} dT G_{\rm ret}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r'},t-t')e^{i\omega T}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} dT G_{\rm ret}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r'},t-t')e^{i\omega T}\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|}\theta(t-t')\delta(\tfrac{1}{c}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|-|t-t'|)$$
$$= \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|}e^{i\frac{\omega}{c}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|}$$

となり、$k = \frac{\omega}{c}$ とおくことで 3 次元ヘルムホルツ方程式の基本解に一致することが示せます。

を辺々足し合わせた

$$\delta(X) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos kX dk$$

を用い、式 (A.18) ではデルタ関数の性質

$$\delta(aX) = \frac{1}{|a|}\delta(X)$$

（置換積分で簡単に示せます）および $\delta(X) = 0$ ($X > 0$ または $X < 0$ のとき) を用いています。

表 A.3　**グリーン関数の基本解のリスト**

微分方程式	1次元	2次元	3次元
ポアソン方程式 $\Delta\phi(\boldsymbol{r}) = -\rho(\boldsymbol{r})$	$-\frac{\lvert x-x'\rvert}{2}$	$-\frac{\ln\lvert\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'\rvert^2}{4\pi}$	$\frac{1}{4\pi\lvert\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\rvert}$
ヘルムホルツ方程式（外向き条件）$(\Delta + k^2)\phi(\boldsymbol{r}) = -\rho(\boldsymbol{r})$	$\frac{i}{2k}e^{ik\lvert x-x'\rvert}$	$\frac{iH_0^{(2)}(k\lvert\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'\rvert)}{4}$	$\frac{1}{4\pi\lvert\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\rvert}e^{ik\lvert\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\rvert}$
拡散方程式 $(\Delta-\frac{1}{\kappa^2}\frac{\partial}{\partial t})\phi(\boldsymbol{r},t)=-\rho(\boldsymbol{r},t)$	$\frac{\kappa^2\exp\left(-\frac{(x-x')^2}{4\kappa^2(t-t')}\right)\theta(t-t')}{\sqrt{4\pi\kappa^2(t-t')}}$	$\frac{\kappa^2\exp\left[-\frac{\lvert\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'\rvert^2}{4\kappa(t-t')}\right]\theta(t-t')}{4\pi\kappa^2(t-t')}$	$\frac{\kappa^2\exp\left[-\frac{\lvert\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\rvert^2}{4\kappa^2(t-t')}\right]\theta(t-t')}{8\sqrt{\pi^3(t-t')^3\kappa^6}}$
波動方程式（遅延条件）$\Box\phi(\boldsymbol{r}) = -\rho(\boldsymbol{r},t)$	$\frac{c\theta(c\lvert t-t'\rvert-\lvert x-x'\rvert)}{2}$	$\frac{\theta(c\lvert t-t'\rvert-\lvert\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'\rvert)}{2\pi\sqrt{c^2\lvert t-t'\rvert^2-\lvert\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'\rvert^2}}$	$\frac{\delta\left(\frac{\lvert\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\rvert}{c}-\lvert t-t'\rvert\right)\theta(t-t')}{4\pi\lvert\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\rvert}$

ただし $\boldsymbol{\rho} = (x, y), \boldsymbol{r} = (x, y, z)$ であり、$H_0^{(2)}$ は第二種のハンケル関数。また、$\theta(t-t')$ はヘヴィサイドのステップ関数

$$\theta(t-t') = \begin{cases} 1 & (t-t' > 0) \\ 0 & (t-t' < 0) \end{cases}$$

参考文献

[1] 三宅敏恒『入門微分積分』, 培風館,1992
[2] 三宅敏恒『入門線形代数』, 培風館,1991
[3] E.Kreyszig『常微分方程式（原書第五版）』（北原和夫 訳）, 培風館,1987
[4] 近藤・高橋・小林・小柳・渡辺『微分方程式　フーリエ変換』, 培風館,1981
[5] 犬井鉄郎『特殊関数』, 岩波書店,1980
[6] 石原繁『ベクトル解析』, 裳華房,2002
[7] 杉田、岡本、関根『理論物理のための微分幾何学』, 森北出版,2007
[8] 渡部、宮崎、遠藤『複素関数』, 培風館,1980
[9] E.Kreyszig『複素関数論（原書第八版）』（丹生慶四郎 訳）,2003
[10] 高橋礼司『複素解析』, 東大出版,1990
[11] 樋口禎一・八高隆雄『フーリエ級数とラプラス変換の基礎・基本』, 牧野書店,2000
[12] 高木貞治『解析概論』, 岩波書店,1983
[13] 蓬田清『演習形式で学ぶ 特殊関数・積分変換入門』, 共立,2007
[14] 今村勤『物理とグリーン関数』, 岩波書店,1978
[15] 千葉逸人『これならわかる 工学部で学ぶ数学』, プレアデス出版,2004
[16] 阿部龍蔵『統計力学（第二版）』, 東大出版,1992
[17] 志賀徳造：ルベーグ積分から確率論, 共立出版,2000
[18] 砂川重信：理論電磁気学 第二版, 紀伊国屋書店,1973

本書を書くにあたって以上の文献を参考にしています。

あとがき

本書は解析学の計算のコツと勘を短期間で養うためのものです。数学の勉強に限らないと思うのですが、たとえば新しく楽器をはじめる際に、分厚い教本を読み始めるよりも、お気に入りのフレーズや、カッコイイ演奏を見よう見まねでやってみる方が、案外技術が身に付いたりするものです（一概にそれが良いとは言えませんけど)。本書はその手助けをするようなものです。

具体的に手が動くようになったら、ぜひもっと内容の突っ込んだ専門書を手に取ってみて下さい。物理でも数学でも、ある程度計算力が身に付くと見通しがぐっと良くなるものです。例えば数学の勉強をしていて、新しい概念を導入する際に、どういう関数がどういった病理的な性質をもっているかがわかるかどうかで定義を受け入れる態度ががらっと変わってくるものです。また、物理の勉強をしていると新しい物理現象を読み解く際に、決まってその場その場で新しい計算テクニックが現れますが、だいたい本書の知識があれば少なくとも学部レベルで詰まることはないはずです。

最後に、本書を執筆するにあたって友人、先輩、後輩のみなさんから多くの助言を賜りました。月並みかも知れませんが、深く感謝申し上げます（クレジットし始めると切りがないので、具体的に誰や誰とは書きませんけれど)。殊に、プレアデス出版の麻畑さんには出版のお話をいただき、感謝しております。

末筆ながら、本書がみなさんのお役に立つことを切に願っております。

索引

【タ行】

【ナ行】

【ハ行】

【マ行】

【ヤ行】

【ラ行】

◉著者略歴

大谷 俊介（おおたに しゅんすけ）

1985年　北海道根室市生まれ.
2010年　北海道大学理学部物理学科卒業.
　　　　同年，同大学院理学院物性物理学専攻入学.
専門は量子多体系物理.

近著：
『量子力学演習（仮題）』『力学演習（仮題）』（共著，サイエンス社）

速修 物理数学の応用技法

2012年4月2日　第1版第1刷発行

著　者　大谷　俊介
発行者　麻畑　　仁
発行所　㈲プレアデス出版
〒399-8301　長野県安曇野市穂高有明7345-187
電話 0263-31-5023　FAX 0263-31-5024
http://www.pleiades-publishing.co.jp
装　丁　松岡　　徹
印刷所　亜細亜印刷株式会社
製本所　神保製本株式会社

落丁・乱丁本はお取り替えいたします
定価はカバーに表示してあります
ISBN978-4-903814-50-6　C3041
Printed in Japan